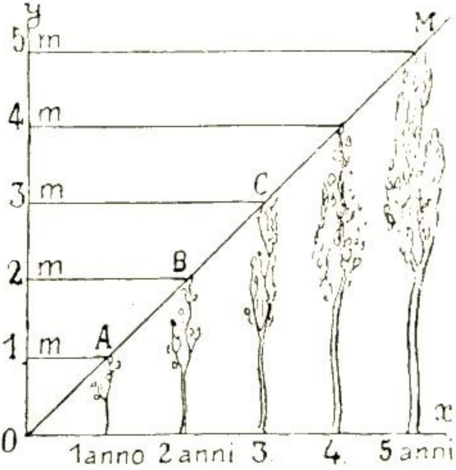
Ing. GUSTAVO BESSIÈRE

IL CALCOLO DIFFERENZIALE ED INTEGRALE

RESO FACILE ED ATTRAENTE



HOEPLI

MANUALI HOEPLI

ING. GUSTAVO BESSIÈRE

Il calcolo differenziale ed integrale

reso facile ed attraente

EDITORE ULRICO HOEPLI MILANO

PREFAZIONE DELL'AUTORE

Questo libro può leggersi con la stessa facilità con la quale si legge un romanzo. Ho preso alla lettera il consiglio di Chasles che raccomanda di scrivere « per l'uomo della strada ».

Mi sono sforzato di scrivere una teoria elementare dell'analisi, partendo dalla nozione di accrescimento considerato come sinonimo di derivata.

Evidentemente non si tratta qui dell'ordine d'incremento considerato nella teoria delle funzioni, ma dell'accrescimento nel senso volgare della parola.

È infatti indubitabile che l'accrescimento di un arbusto in un dato istante, ed espresso in metri all'anno, è esattamente la derivata della sua altezza rispetto al tempo.

Utilizzo così delle nozioni differenziali che tutt- posseggono intuitivamente: pendenza ed altezza; ingrasi samento e peso; velocità e spazio; arricchimento e patrimonio.

Si vede che non esito a ricorrere ad esempi concreti, volgari se si vuole, ma che sono dei veri esempi che si possono sottoporre a calcolo e non dei semplici paragoni.

Dal punto di vista della scrittura metto in evidenza soltanto l'incremento della variabile, che scrivo 1/N. *Ne deduco l'incremento della funzione e moltiplico questo per* N *per ottenere la derivata.*

Questa scrittura, il cui carattere aritmetico facilita l'intendimento, presenta dei vantaggi specialmente per derivare direttamente le funzioni circolari ed esponenziali. E siccome non ho ricorso alla notazione differenziale che dopo un esteso studio delle derivate, non faccio del resto che conformarmi ad un uso press'a poco generale.

Avendo così reso facile il calcolo, mi sono adoperato per renderlo attraente, evitando ogni rigore aggressivo.

Nelle opere matematiche moderne si esagera forse un po' troppo l'aridità e l'austerità. Gli autori antichi erano forse più fantasiosi e famigliari.

« Amico, se tu possiedi la saggezza, metti gran cura nel calcolare a quanto ammontava la moltitudine dei buoi del Sole che un tempo nelle pianure della Trinacria pascolavano ripartiti in quattro mandre di colore differente...... ».

Così si esprimeva il divino Archimede nell'esporre l'enunciato del « problema dei buoi ».

Oggi lo stesso problema sarebbe posto in modo ben diverso: niente pianure nè mandre, niente buoi bianchi, neri, bruni o pezzati, ma uno scheletrico sistema di 7 *equazioni a* 8 *incognite accompagnate da una condizione supplementare.*

Così i nostri disgraziati tapini sono privati del sole, della natura e della poesia persino negli enunciati dei problemi.

Senza voler contraffare la maniera degli antichi, ho cercato dei problemi concreti: il problema del barcone, quello delle api, il problema della casseruola, che mi sembrano di natura tale da interessare più da vicino il lettore mentre in pari tempo lo rassicurano.

Mi sembra che un buon alunno di scuola primaria, dotato di qualche rudimento d'algebra e geometria, possa leggere utilmente questo libretto.

Si insegnava ai Politecnici, or è un secolo, ciò che ora s'insegna nelle scuole professionali. Immagino che fra un altro secolo il corso dell' x comincerà col calcolo differenziale assoluto e che nelle scuole professionali si insegnerà l'analisi delle funzioni delle variabili complesse.

Allora bisognerà bene che l'analisi elementare sia professata in qualche luogo. Per forza di cose ne erediterà la scuola primaria.

Come farà il maestro per insegnare l'integrazione a scolari di dodici anni?

È probabile che l'insegnamento primario dell'analisi somiglierà molto all'insegnamento primario della matematica; solo che, invece di spartire delle torte, il maestro farà crescere degli arbusti immaginarii, ingrasserà dei montoni convenzionali, integrerà dei patrimonii illusorii e, siatene certi, si farà capire.

Ed ora, cortesi Lettori, mi rivolgo a voi.

Quanto espongo in questo libro è alla portata di qualsiasi scolaro del prossimo secolo.

Non dite che è troppo difficile per voi: sono certo che avete afferrato dei concetti ben più oscuri.

Se capite quei romanzi moderni la cui frase, un po' velata, non palesa i suoi segreti che alla seconda lettura, leggerete il mio libro con facilità.

Sono pure sicuro che ammirate talora quei quadri moderni d'avanguardia il cui significato quasi non varia, quando li voltiate con le gambe per aria. Paragonati a questi rebus, le mie figure geometriche vi appariranno d'una semplicità infantile.

Infine, come chiunque, avrete press'a poco compreso perchè il metro non vale sempre un metro, perchè la lira, il franco, la sterlina non valgono sempre una lira, un franco, una sterlina, e ne ho concluso che siete maturi per acquistare la nozione di variabile dipendente.

Credetemi, cortesi Lettori, tutto quanto contiene questo libretto è in voi e potreste scoprirlo unicamente interrogando il vostro buon senso.

Permettetemi di aiutarvi.

ING. GUSTAVO BESSIÈRE

PREFAZIONE

ALLA PRIMA EDIZIONE ITALIANA

Questo libretto può venire giudicato più o meno bene a seconda del punto di vista dal quale lo si considera.

Un matematico, anche senza essere un purista, troverà forse che, per semplificare, l'Autore ha talvolta sacrificato il rigore indispensabile per questo genere d'argomenti e che, pure coi diversi lievi ritocchi apportati nella traduzione, il libro conserva il suo difetto d'origine di volere volgarizzare troppo a buon mercato, in modo non sempre conciliabile col pensiero matematico.

Siamo più che perfettamente d'accordo, ma non bisogna neppure credere che l'Autore, non matematico come si dichiara, abbia voluto riformare l'insegnamento del calcolo infinitesimale; lo scopo dell'Autore è un altro e precisamente di dare di quest'ultimo un'idea più o meno precisa a quei Lettori che non si sentono di aprire un vero trattato, sia perchè non sono abbastanza preparati per gustarlo, sia perchè non hanno l'intenzione *di approfondirsi in materia, sia perchè ritengono sufficiente alla loro cultura ed ai loro bisogni poche parole alla buona, senza pretese. È la ragione per cui il libretto probabilmente appagherà invece il profano e forse anche lo divertirà, ad esempio col grazioso problema delle api, senza troppo, come dice l'Autore, affaticargli le meningi.*

Ed è appunto per questo ch'esso è stato tradotto.

INDICE

CAPITOLO IX.

CAPITOLO X.

CAPITOLO XI.

CAPITOLO XII.

CAPITOLO XIII.

CAPITOLO XIV.

CAPITOLO XV.

CAPITOLO XVI.

CAPITOLO XVII.

CAPITOLO XVIII.

CAPITOLO XIX.

IL CALCOLO DIFFERENZIALE ED INTEGRALE RESO FACILE ED ATTRAENTE

CAPITOLO PRIMO

NEL QUALE IL CORTESE LETTORE È PREGATO DI NON FARE SFORZI INUTILI PER CAPIRE ÇIÒ CHE È EVIDENTE

1. Difficoltà che si incontrano nel comprendere una cosa troppo semplice. — Il calcolo differenziale ed integrale presenta, come tutte le scienze, degli sviluppi la cui difficoltà è grandissima. In compenso esso è nei suoi principi essenziali d'una semplicità che sconcerta. Non si osa quasi credere ch'esso sia così semplice.

Il principiante che si prepara ad esplicare chi sa quale faticoso sforzo cerebrale, mira troppo in alto, fallisce il suo scopo e, sgomentato, si rassegna ad imparare press'a poco a memoria, finchè un giorno, con l'aiuto della pratica, riesce a capire da solo ciò che una maldestra pedagogia gli aveva fino allora nascosto: egli è che non esiste alcuna scienza, per quanto elevata, che non trovi la sua origine nelle cose, e che basta vedere in modo semplice per vedere chiaramente.

Benchè escogitato in gran parte con scopi astronomici, il calcolo differenziale ed integrale può venire spiegato, proprio come l'aritmetica elementare, con l'aiuto d'esempi famigliari. Quella stessa verità che regge il movimento degli astri, la troviamo alquanto più accessibile intorno a noi, nell'acqua che scorre, nella strada che monta, nella pianta che cresce, brevemente: in ogni grandezza che varia.

Questo modesto libretto vi insegnerà delle belle ed attraenti cose, ma, per comprenderle, è essenziale di non fare sforzo alcuno che impedisca di vedere in modo semplice. Leggete lentamente, poco alla volta, meditate, rileggete, metteteci tutto il tempo necessario, insomma digerite bene.

Ben presto si risveglierà la vostra curiosità ed allora proverete quella gioia d'imparare che è la condizione prima per assimilare rapidamente e con profitto. Se, malgrado tutto non capirete molto bene qualche punto alla prima lettura, non v'arrestate, vi ritornerete sopra più tardi; e sopratutto: non vi scoraggiate; seguite il consiglio di d'Alembert: « andate avanti, la fede verrà ».

2. Sotto nomi differenti, non parleremo che di una sola cosa: la grandezza. — Ecco qui un uomo: ad un tempo padre di suo figlio, figlio di suo padre, nipote di suo zio, zio di suo nipote, fornitore dei suoi clienti, cliente a sua volta dei suoi fornitori, ecc. ecc.

Sotto qualunque veste noi lo consideriamo, qualunque sia la parte ch'egli fa in questo mondo, è pur sempre ed unicamente un uomo.

Impiegheremo in questo libretto dei nomi ben differenti, ad es.: funzioni variabili, costanti, derivate, integrali, per indicare sempre, sotto aspetti differenti, una e medesima cosa: la grandezza.

Vedremo infatti che la maggior parte delle grandezze che conosciamo sono, se le consideriamo ben da vicino, delle variabili. E vedremo anche che una variabile è ad un tempo funzione delle grandezze da cui dipende, integrale delle sue derivate, derivata dei suoi integrali, e così via.

Impareremo più avanti il significato preciso di tutti questi vocaboli « di colore oscuro », ma intanto ci teniamo assai a stabilire, una volta per sempre, che sotto tali nomi non si nascondono in definitiva che delle *grandezze* e per conseguenza dei numeri.

3. Grandezze costanti e grandezze variabili. — La matematica, ha detto Bertrand Russell, è una scienza nella quale s'ignora di che cosa si parla e nella quale non si sa se ciò che si dice sia vero. Senza prendere troppo alla lettera questo tratto di spirito, dobbiamo riconoscere ch'esso risponderebbe per noi alla verità se non attribuissimo alle convenzioni che seguiranno una capitale importanza.

Prima di studiarle, le grandezze vengono classificate in due categorie: le grandezze costanti e le grandezze variabili.

Si dicono *costanti* quelle che conservano sempre lo stesso valore.

Per esempio la distanza da Milano a Torino, l'altezza del Duomo di Milano, sono delle costanti. Parimenti, il rapporto della circonferenza al diametro è una costante.

Nei calcoli che faremo impiegheremo delle costanti, talvolta anche senza sapere con precisione ciò ch'esse rappresentano; ma quel che sappiamo è che resteranno costanti in tutto il nostro calcolo. Ecco qui il mezzo grafico per riconoscerle: *Le grandezze costanti saranno rappresentate dalle prime lettere dell'alfabeto*: a, b, c, d; *oppure* A, B, C, D, *ecc.* Tenetelo ben a mente.

Si chiamano invece *variabili* quelle grandezze che possono assumere differenti valori.

Per esempio la temperatura d'un corpo, la pressione del vento sopra un ostacolo, la velocità di un treno in marcia sono tante variabili. Bisogna imparare a riconoscere le variabili: *Le grandezze variabili sono rappresentate dalle ultime lettere dell'alfabeto*: u, v, x, y, z; *oppure* U, V, X, Y, Z. Non dimenticatelo, poichè è essenziale.

Si chiama algoritmo di una teoria il modo di notazione adottato nell'esporla, cioè il significato dei segni e delle lettere impiegate; brevemente: la scrittura algebrica.

In base a quanto abbiamo detto, il termine $4ab^7xy^2$ è un prodotto, i cui fattori sono:

il fattore numerico 4, naturalmente costante;

i fattori *costanti* a e b^2;
i fattori *variabili* x e y^3.

Impareremo a conoscere gli altri segni dell'algoritmo analitico man mano che si presenteranno. Ricordiamo sopratutto la distinzione fondamentale fra le costanti $a, b, c, d \ldots$ e le variabili $z, y, x, v, u, t \ldots$

4. Valore definito e valore indefinito di una variabile. — Quando si scrive x o y oppure z bisogna pure immaginarsi i significati possibili di queste lettere, che rappresentano, come abbiamo detto, delle variabili.

Quando scriviamo: la variabile x, possiamo, *a nostro piacimento*, supporre che si tratti d'un solo dei valori di x (valore definito) oppure dell'insieme di tutti i valori di x (valore indefinito). Qualche esempio servirà a chiarire questi concetti.

Quando parlo della portata del Po, si tratta evidentemente di una grandezza variabile, per cui la rappresenterò con x o y oppure z (ultime lettere dell'alfabeto).

Indichiamola con x. Se io dico: il Po ha in questo momento una portata di x metri cubi al secondo, non si sa se io parlo della portata a Torino, a Piacenza oppure a Ferrara. Bisogna quindi intendere che x rappresenti tutta una collezione di valori indicanti la portata del fiume nei differenti punti del suo percorso; x è cioè un valore indefinito non definito).

Ma se io dico: il Po, a Torino, ha in questo momento una portata di x metri cubi al secondo, si tratta evidentemente d'un valore particolare di x, d'un valore definito.

Così se chiamo y l'età di un uomo, y rappresenta un valore indefinito o generale costituito da tutti i numeri compresi fra 0 anni e la sua età attuale.

Ma posso anche precisare dei valori particolari di y; posso dire, per esempio, che quest'uomo aveva:

$y = 0$ anni nel luogo di nascita;
$y = 22$ anni quando uscì dall'Università;
$y = 30$ anni quando si sposò;
$y = 60$ anni quando diventò nonno.

Il valore generale di y è costituito da tutti i valori particolari di y. Meditate a lungo questo capitolo prima di passare al successivo.

CAPITOLO II

LE FUNZIONI

5. Che cosa è una funzione. — La portata del Po dipende dalla distanza compresa fra la sorgente del fiume ed il punto nel quale la portata viene misurata; l'età dell'uomo considerato alla fine del capitolo precedente dipende dal millesimo dell'anno considerato; la lunghezza d'una sbarra di ferro dalla sua temperatura, il quadrato d'un numero dipende da questo numero, ecc.

Qualsiasi grandezza che dipende da un'altra grandezza è funzione di quest'ultima.

In questa definizione non c'è altro di nuovo che l'idea di *dipendenza*:

1° Una funzione è una grandezza;

2° Una funzione è una grandezza variabile;

3° Essa *dipende* da un'altra grandezza.

Quando indicherete una funzione, abbiate cura di aggiungere *di che cosa.*

Se io dicessi: l'altezza d'un arbusto è una funzione, l'informazione sarebbe insufficiente.

È come se dicessi: l'altezza d'un arbusto dipende da qualche cosa, senza aggiungere da che cosa dipende.

Dirò dunque: l'altezza d'un arbusto è funzione del tempo (cioè dipende dal tempo); allora non c'è più dubbio alcuno.

6. La funzione y la variabile x. — Quando due grandezze dipendono l'una dall'altra, si può considerare a piacimento la prima come funzione della seconda o la seconda come funzione della prima.

Ma è uso di chiamare *funzione* la grandezza che costituisce l'oggetto di studio e di chiamare *variabile* quella che fa una parte accessoria.

Quando considero la funzione *altezza di un arbusto* che dipende dal tempo, il mio scopo non è in generale di misurare come fugge il tempo per mezzo delle variazioni dell'arbusto, bensì di misurare le variazioni dell'arbusto con l'aiuto del tempo. Chiamerò dunque *funzione* l'altezza dell'arbusto, e chiamerò *variabile* il tempo.

È consuetudine indicare con y la funzione e con x la variabile.

Chiamerò quindi y l'altezza dell'arbusto ed x il tempo. Dirò che a x anni l'arbusto misurava y metri d'altezza, e dirò che y è una funzione di x; ciò si scrive: $y = f(x)$ e si legge: y è eguale a una funzione di x.

7. Alcune semplici funzioni e la loro rappresentazione geometrica. — Immaginiamo un albero che cresca di un metro all'anno.

All'età di un anno misurerà un metro.
A 2 anni, 2 metri.
A 3 anni, 3 metri.
E ad x anni, x metri.

Se ora chiamo y l'altezza in metri ed x il tempo in anni, questi due numeri saranno sempre eguali tra loro, poichè l'albero avrà sempre tanti metri d'altezza quanti sono i suoi anni, e si avrà:

$$y = x;$$

è questa la funzione algebrica che rappresenta l'altezza dell'albero.

Vediamo la rappresentazione geometrica di questa funzione nella fig. 1. Su Ox (detto *asse delle ascisse*) si portano a partire da sinistra e verso destra, gli anni: 1 anno, 2 anni, ecc.; rappresenteremo ad esempio, il tempo di 1 anno con la lunghezza di 1 centimetro.

Su Oy (detto *asse delle ordinate*) si portano dal basso in alto i metri: 1 metro, 2 metri, ecc.; adotteremo, ad esempio, la scala di 1 : 100, e quindi rappresenteremo la lunghezza di 1 metro con quella di 1 centimetro.

Per tutti questi punti si conducono le parallele agli assi, e si contrassegna con una lettera ciascun punto di intersezione:

per 1 anno, 1 metro: punto A;
per 2 anni, 2 metri: punto B;
per 3 anni, 3 metri: punto C, ecc.

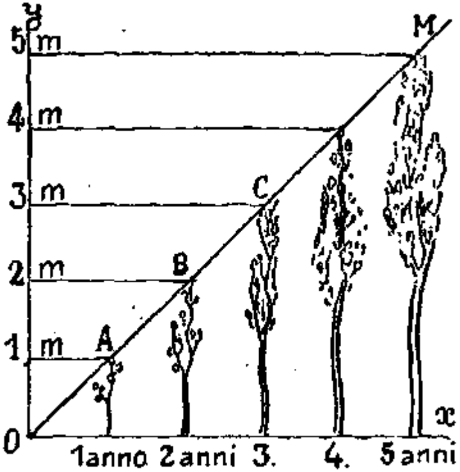


Fig. 1.

La linea OM, che riunisce i punti A, B, C... così ottenuti, rappresenta graficamente la funzione « altezza della pianta ».

Spesso la linea che è rappresentazione grafica di una funzione chiamasi il *diagramma* della funzione. Nel caso in esame il diagramma è una retta.

Invece d'un albero che cresce di un metro all'anno, avremmo potuto considerare il caso di un pollo che ingrassa di un chilogrammo all'anno (fig. 2), e avremmo di nuovo trovato:

$$y = x.$$

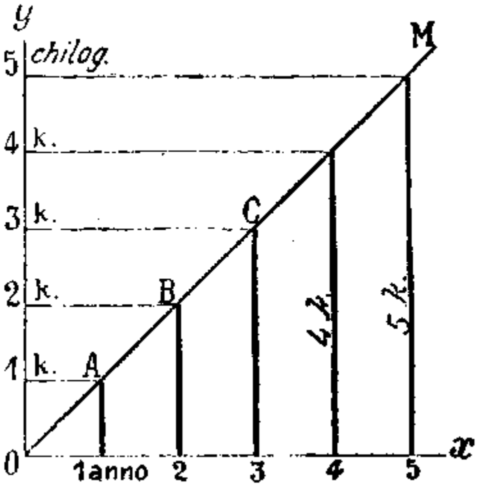


Fig. 2.

Potremo anche considerare un patrimonio, che parte da zero ed aumenta di 1 lira al giorno. Chiamando y il patrimonio ed x il numero dei giorni, avremo ancora:

$$y = x.$$

C'è dunque interesse a studiare la funzione $y = x$, poichè i risultati del nostro studio si potranno applicare a questi tre differenti casi ed a tanti altri ancora.

Costruiamo nella fig. 3 la retta che rappresenta

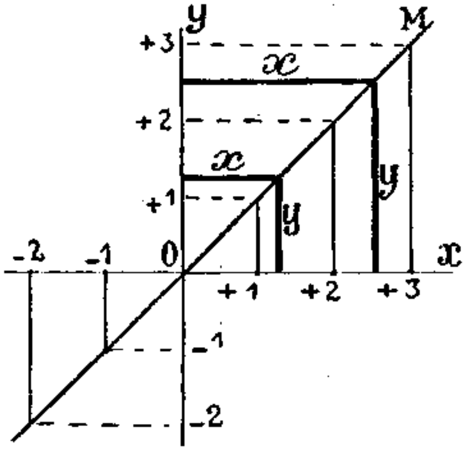


Fig. 3.

la funzione $y = x$; essa può altrettanto bene adattarsi al caso della pianta, a quello del pollo, a quello del patrimonio, e può rappresentare anche una qualsiasi altra grandezza che vari nello stesso modo.

Si osserverà che a dei valori negativi di x corrispondono dei valori egualmente negativi di y. Il significato della linea è quindi più generale di quello dei casi concreti più sopra esposti.

8. Altri esempi. — Una pianta potrebbe crescere di 2 metri all'anno, con che la sua altezza in metri sarebbe il doppio del numero dei suoi anni, cioè $y = 2x$. Avremo dunque:

a 1 anno $y = 2$ metri (punto A);
a 2 anni $y = 4$ metri (punto B);
a 3 anni $y = 6$ metri (punto C);
e ad x anni $y = 2x$ metri (linea OM).

La funzione $y = 2x$ è rappresentata graficamente nella fig. 4; nella fig. 5 si è completato il diagramma tracciandone anche quella parte che corrisponde a valori negativi delle variabili:

per $x = -1$ $y = -2$ (punto C);
per $x = -2$ $y = -4$ (punto D), ecc.

È dunque utile studiare la funzione $y = 2x$; lo stesso sarebbe di $y = 3x$ e di $y = 4x$, e, più generalmente, di $y = ax$ (dove la lettera a, non dimentichiamolo, rappresenta una costante, cioè un numero invariabile).

In generale qualunque espressione algebrica che contiene x dipende da x ed è funzione di x. Così sono funzioni di x le seguenti:

$$y = 3x + 5,$$
$$y = 4x^3 - 2x,$$
$$y = ax^m + bx + c,$$
$$y = a/x + b,$$
$$y = a\sqrt{x},$$
$$y = a^x.$$

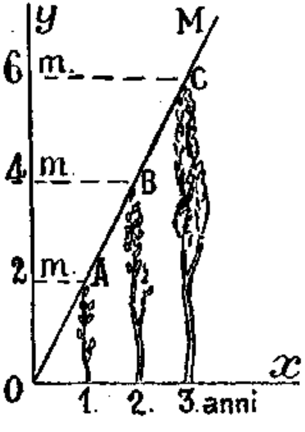


Fig. 4.

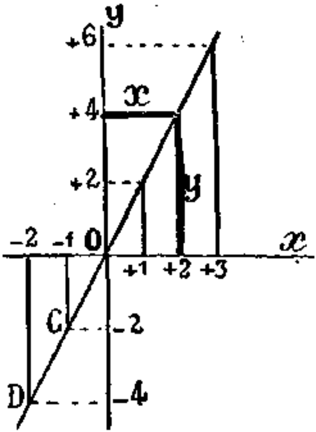


Fig. 5.

Studiare le proprietà delle funzioni di x vuol dire studiare le proprietà di tutte le espressioni possibili contenenti x.

Si vede che il campo è vasto, ma si può dare facilmente qualche concetto generale.

9. Funzioni continue e funzioni discontinue. — L'altezza d'una pianta è una funzione del tempo. Ora, una pianta cresce per gradi insensibili; essa non può passare bruscamente dall'altezza di 3 metri all'altezza di 4 metri; anche se crescesse in modo rapidissimo, *l'altezza deve passare per tutti i valori intermedi*. Questa altezza è quindi una funzione *continua* del tempo.

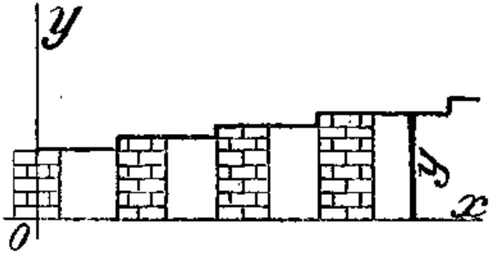


Fig. 6.

Al contrario, l'altezza d'un pilastro di mattoni in costruzione è una funzione *discontinua* del tempo, poichè essa non può aumentare che dello spessore d'un mattone per volta e mai meno (fig. 6).

Una funzione è continua quando non può passare da un valore ad un altro senza prendere tutti i valori intermedi. Essa è invece discontinua nel caso contrario.

10. Funzione crescente e funzione decrescente. — Una funzione è crescente quando varia nello stesso senso della variabile; è decrescente nel caso contrario. Presto degli esempi:

L'altezza d'una pianta che cresce è funzione d'una variabile che è il tempo.

L'altezza aumenta quando il tempo aumenta, la funzione e la variabile vanno nello stesso senso: ecco un esempio di *funzione crescente.*

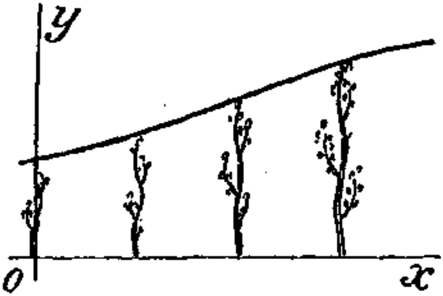


Fig. 7.

Essa è rappresentata nella fig. 7 da una linea « che monta ».

L'altezza di una candela che brucia dipende pure dal tempo, ma varia in senso inverso; quando il tempo aumenta la candela si accorcia, cioè la sua altezza diminuisce; la funzione e la variabile vanno in senso inverso: ecco un esempio di *funzione decrescente*. Il suo diagramma discende (fig. 8).

Infine una funzione può essere ora crescente ora decrescente, come è della statura umana.

Nella gioventù la statura aumenta quando il tempo aumenta: la funzione è crescente. Nella

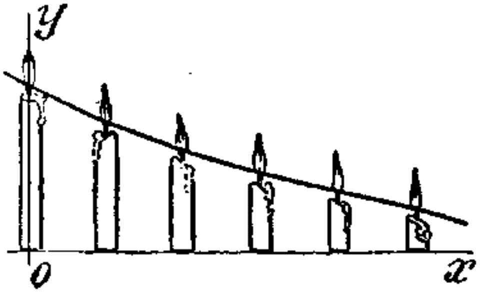


Fig. 8.

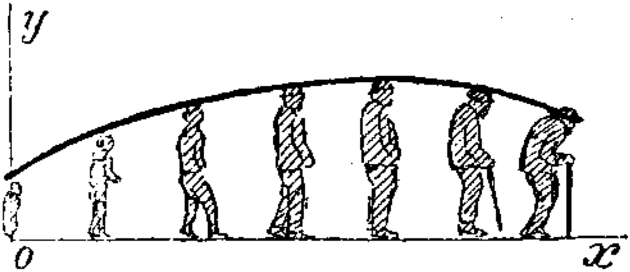


Fig. 9.

vecchiaia la statura diminuisce quando il tempo aumenta: la funzione è decrescente (fig. 9).

Rivolgiamoci a degli esempi algebrici:

Quando x aumenta, il suo doppio aumenta;

dunque la funzione $y = 2x$ è crescente, poichè y (cioè la funzione) e x (la variabile) variano nel medesimo senso.

Parimenti la funzione $y = 3x$ è crescente, perchè il triplo di x varia nello stesso senso di x.

Al contrario, la funzione

$$y = \frac{1}{x}$$

è decrescente, perchè se x aumenta, la sua inversa $1/x$ diminuisce.

Costruiamo qualche diagramma per mostrare la cosa graficamente.

Per costruire la linea $y = 3x$ porto sull'asse delle ascisse i valori di x, cioè $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, ecc. (fig. 10).

Osservo che per $x = 1$ la funzione $y = 3x$ assume il valore

$$y = 3 \times 1 = 3;$$

per $x = 2$ la funzione diventa $y = 3 \times 2 = 6$;

per $x = 3$ ottengo $y = 9$.

Ho ora i tre valori di y che sono 3, 6 e 9. Li porto sull'asse delle ordinate e tirando le corrispondenti parallele, ottengo i punti del diagramma.

Si vede ch'esso monta, ciò che è naturale poichè la funzione è crescente.

Vi sarà facile costruire analogamente il diagramma della funzione $y = 4x$, indicato dalla figura 11 (per $x = 1$ si porta $y = 4$ e così via).

Rappresenteremo infine la funzione $y = 1/x$, limitandoci a considerare i valori positivi della variabile (figura 12).

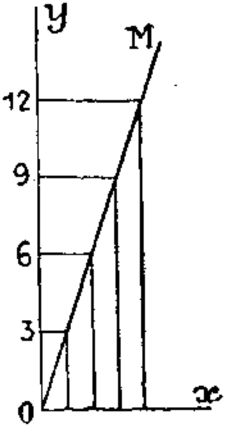


Fig. 10.

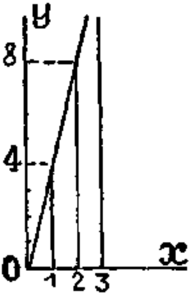


Fig. 11.

Portiamo come sempre le x orizzontalmente: 1, 2, 3, 4, ecc. e le y verticalmente; i corrispondenti valori di y sono: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ecc. Infatti per $x = 1$ la funzione $y = 1/x$ assume il valore $y = 1/1 = 1$; per $x = 2$ si ha $y = 1/2$, ecc.

Tracciamo il diagramma; si vede ch'esso discende (infatti la funzione è decrescente).

Questi esempi mettono in luce che l'incremento, o variazione di una funzione, dipendente da un aumento della variabile, è talvolta positivo, talvolta negativo, ora più grande, ora più piccolo. Lo studio dell'incremento è molto importante, e di esso si

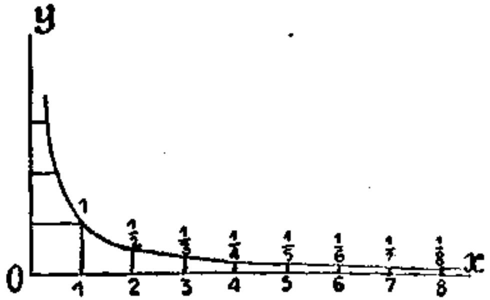


Fig. 12.

occupa l'analisi. Possiamo dire che mentre in aritmetica e in algebra si misurano le grandezze, in analisi si misurano le loro variazioni od incrementi.

Quest'ultimo è il compito del presente libretto.

Rileggete due volte questo capitolo; guadagnerete del tempo. Cercate di rifare da soli le figure 10, 11 e 12. Fatto ciò, andate avanti.

CAPITOLO III

LE DERIVATE

11. L'incremento o accrescimento è una grandezza misurabile. — L'idea feconda del calcolo differenziale è di misurare gli incrementi o variazioni delle grandezze.

Un albero grande può crescere lentamente, un albero piccolo può, invece, crescere rapidamente. La grandezza è una cosa, l'incremento è un'altra.

Quasi tutti i fenomeni studiati nelle scienze si riducono a delle questioni d'accrescimento o di decremento di talune grandezze.

Siccome queste grandezze dipendono le une dalle altre, esse sono delle funzioni.

Di guisa che i due problemi essenziali dell'analisi sono i seguenti:

1° *problema.* — Data una funzione, misurare il suo incremento (diremo anche: *trovare la sua derivata*).

2° *problema.* — Conoscendo una misura d'incremento (o derivata) ritrovare la funzione.

Questi due problemi danno luogo ad un gran numero di problemi particolari.

Quelli che entrano nella prima categoria costituiscono il *calcolo delle derivate* o *calcolo differenziale.*

Quelli della seconda categoria formano il *calcolo integrale.*

(Incontreremo più avanti una terza categoria di problemi, più elevati, quando parleremo delle equazioni differenziali).

Il nostro studio avrà carattere elementare, ma sarà sufficiente per molte applicazioni.

Diamo subito della derivata una definizione provvisoria che verrà precisata e completata più avanti:

La derivata di una funzione è il suo incremento riferito all'unità di variabile.

Ciò non può essere ben compreso se non per mezzo di esempi. Eccone subito parecchi.

1° Caso.

12. Misura di un incremento regolare od uniforme. — Quando una grandezza dipende dal tempo, si chiama derivata di questa grandezza il suo incremento *per unità di tempo.*

Così l'altezza d'una pianta è funzione del tempo. Se questa pianta cresce uniformemente di 2 metri *all'anno,* l'incremento della sua altezza in metri all'anno è 2.

Se la funzione dipende da una lunghezza, la derivata è l'incremento *per unità di lunghezza.*

Per esempio se l'altitudine di una strada che monta aumenta uniformemente di 5 cm. *per metro,* l'incremento d'altitudine o pendenza, in centimetri per metro, è 5; in metri per metro è 0,05.

Consideriamo ancora altri esempi: se un patrimonio s'accresce uniformemente di 2000 lire all'anno, il suo incremento od arricchimento, in lire *all'anno,* è di 2000.

Se il peso di un animale aumenta regolarmente di 5 chilogrammi al mese, il suo incremento od ingrassamento, in chilogrammi *al mese,* è 5.

Se la lunghezza di una sbarra di ferro aumenta uniformemente di 0,1 millimetri per grado di temperatura, il suo incremento in millimetri *per grado di temperatura è* 0,1.

Tutte queste grandezze sono delle funzioni *il cui incremento è stato supposto uniforme*; i numeri che misurano l'incremento danno senza calcolo *le derivate,* poichè questi numeri misurano l'accrescimento della funzione *all'anno, per metro, al mese, per grado,* insomma, *per unità di variabile.*

Vediamo ora come si misura un incremento irregolare, ossia non uniforme.

2° Caso.

13. Misura d'un incremento irregolare. Pendenza non uniforme. La pendenza è la derivata dell'altitudine rispetto alla distanza. — Supponiamo di voler definire e misurare la pendenza d'una strada, il cui profilo longitudinale è una curva, come quella indicata dalla figura 13.

Per cercare la pendenza nel punto A possiamo mettere una mira (biffa) in B, punto distante di un ettometro da A, e misurare, mediante un livello, la differenza d'altitudine (dislivello) esistente fra i punti B ed A. Misureremo questo dislivello in

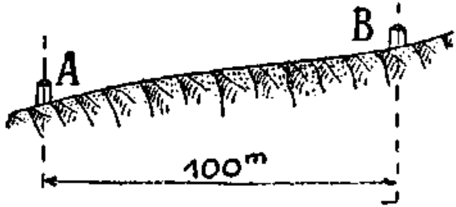


Fig. 13

metri; lo stesso numero rappresenterà la pendenza media, in metri per ettometro, del tratto AB, ma non lo si potrà assumere per rappresentare la pendenza nel punto A.

Ecco invece come faremo se vorremo trovare una misura ragionevole della declività nel punto A.

Divideremo l'ettometro in 100 metri e misureremo il dislivello per il primo metro successivo ad A, indi moltiplicheremo il risultato per 100. Questo numero rappresenterà la pendenza media, in metri per ettometro, sul metro di strada successivo al punto A, e si potrà assumere come misura della pendenza della strada nel punto A.

Se volessimo essere più rigorosi (in teoria) dovremmo dividere l'ettometro in 1000 decimetri e misurare l'incremento d'altezza per decimetro, che moltiplicheremmo poi per 1000.

Per generalizzare, diciamo che si dividerà l'unità ettometro in N parti e che si misurerà l'incremento d'altitudine in metri per un N^{simo} d'unità; questo incremento verrà in seguito moltiplicato per N, e il numero così ottenuto sarà atto a rappresentare la pendenza della strada in A, tanto più quanto maggiore è il numero N.

Se il numero N è molto grande, il risultato sarà d'altrettanto più esatto (a condizione, ben inteso, che la superfice della strada sia assolutamente liscia, cioè continua).

Noi impareremo presto a determinare il valore a cui tende il risultato, ottenuto col procedimento precedente, quando il numero N cresce indefinitamente (si suol dire che N tende all'infinito); questo valore potrà convenientemente essere assunto per definire e misurare la pendenza in A.

Si può dire che la pendenza così definita è ancora l'incremento dell'altitudine riferito all'unità di distanza, ma la misura dell'incremento viene fatta su un piccolissimo tratto di strada attiguo ad A. La pendenza è quindi la derivata dell'altitudine rispetto alla distanza.

14. La velocità è la derivata della distanza rispetto al tempo. — Mi trovo su di un'automobile e mi allontano dalla autorimessa. Che cosa cresce? La mia distanza dall'autorimessa, la quale distanza dipende dal tempo. Essa è funzione del tempo.

L'incremento della distanza nell'unità di tempo e la *velocità*. Se la distanza aumenta di 65 chilometri in un'ora, si suol dire che la velocità è di 65 *chilometri all'ora*.

Ma questa non è che una velocità media oraria.

Se voglio misurare con precisione la mia velocità attuale, divido l'ora in *N* parti, per es. in 60 minuti. Misuro poi il cammino fatto in un minuto e lo moltiplico per 60. Se percorro 1 chilometro al minuto faccio 60 km. all'ora.

Ma anche nell'intervallo di un minuto la velocità può variare, sicchè sarà preferibile misurare lo spazio percorso in un secondo e poi moltiplicarlo per 3600. Insomma si avrà un risultato tanto più adatto a rappresentare la velocità quanto più grande sarà il numero *N*, e se potremo cogliere il limite a cui questo risultato tende quando *N* tende all'infinito, questo limite definirà e misurerà, nel modo più opportuno, la velocità istantanea. La velocità è quindi l'incremento della distanza riferito all'unità di tempo, ma la misura dell'incremento dev'essere fatta in un piccolissimo tempuscolo prossimo all'istante considerato, a cui la velocità si riferisce. La velocità è quindi la derivata dello spazio rispetto al tempo.

15. L'ingrassamento è la derivata del peso. Immaginiamo un animale il cui peso, funzione del tempo, cresca o decresca in una maniera che supporremo continua.

Per valutare il suo ingrassamento *attuale* in chilogrammi all'anno, non attenderemo un anno; ciò sarebbe troppo lungo e sbagliato perchè ci darebbe soltanto l'ingrassamento medio annuale. Per avere l'ingrassamento attuale, divideremo l'anno (unità di tempo) in 365 giorni, misureremo l'accrescimento del peso (ingrassamento) in un giorno, e lo moltiplicheremo per 365.

Faremo meglio ancora se calcoleremo l'ingrassamento in un'ora e lo moltiplicheremo per 8760.

Quanto più il numero N delle parti in cui l'anno è diviso sarà grande tanto più il calcolo sarà soddisfacente. Arriveremo come dianzi alla conclusione che l'ingrassamento è, in ciascun istante, l'incremento della funzione peso *per unità di tempo,* ossia che l'ingrassamento è la derivata del peso rispetto al tempo.

16. Definizione di derivata. — Abbiamo già dato nel n. 11 la definizione di derivata, e l'abbiamo poi illustrata con alcuni esempi. Ora la ripeteremo completandola. *La derivata di una funzione è il suo incremento riferito all'unità di variabile*; si otterrà la derivata di una funzione moltiplicando per N l'incremento corrispondente ad un N^{esimo} d'unità di variabile, indi facendo crescere indefinitamente il numero N.

Per ben comprendere questa regola basta ripetere quanto abbiamo fatto in un caso concreto. Prendiamo il caso dell'ingrassamento, derivata del peso. Descriviamo su due colonne affiancate il procedimento seguito in quel caso concreto e la regola generale.

REGOLA

Per misurare l'accrescimento del peso, si lascia crescere il tempo di $\frac{1}{N}$ di unità.	**Per calcolare la derivata d'una funzione si fa crescere la variabile di $\frac{1}{N}$.**
Si valuta l'accrescimento del peso in questo tempo e lo si moltiplica per N.	**Si valuta l' incremento corrispondente subito dalla funzione e lo si moltiplica per N.**
Indi si fa crescere indefinitamente il numero N.	**Indi si fa crescere indefinitamente il numero N.**

Cercate di capire a fondo questa regola rileggendo le due colonne per vedere chiara l'identità dei due metodi.

17. Regole di derivazione. — Per non dimenticare nulla, formuliamo una regola, in quattro parti, ed impariamola a memoria.

Per calcolare la derivata di una funzione della variabile x bisogna:

1° Fare crescere la variabile x di $\frac{1}{N}$, cioè mettere $x + \frac{1}{N}$ al posto di x.

2° Valutare il corrispondente incremento della funzione.

3° Moltiplicare per N l'incremento della funzione.

4° Fare crescere indefinitamente il numero N.

Nelle valutazioni pratiche di una pendenza o di una velocità basta che N sia molto grande, ma per eseguire la derivata d'una funzione algebrica bisogna far crescere indefinitamente il numero N, ossia (come si dice frequentemente) bisogna far tendere il numero N all'infinito.

La sapete a memoria la vostra regola? — In tal caso passiamo a calcolare una derivata. È ben facile.

18. Derivazione di $3x$. — Vogliamo calcolare la derivata della funzione $3x$. Applichiamo la regola:

1° *Facciamo crescere x di* $\frac{1}{N}$, in altre parole, mettiamo $\left(x + \frac{1}{N}\right)$ al posto di x. La funzione non avrà più il valore $3x$, bensì

$$3\left(x + \frac{1}{N}\right),$$

ossia

$$3x + \frac{3}{N}.$$

2° *Vediamo di quanto la funzione è aumentata.* Essa era $3x$, ora è diventata $3x + \frac{3}{N}$, quindi l'aumento è stato di $\frac{3}{N}$.

3° *Moltiplichiamo questo incremento per N.*

Otteniamo $\frac{3}{N} \times N = 3$.

Questo risultato è indipendente da N; pertanto esso non muta quando si fa crescere indefinitamente il numero N (4ª operazione), ed è proprio la derivata richiesta.

Indichiamo con D maiuscolo la derivata; è una comoda abbreviazione. Scriveremo quindi $D.3x = 3$ e leggeremo: la derivata di $3x$ è uguale a 3. Guardate un po' che semplicità!

Si troverebbe nello stesso modo che la derivata di $4x$ è 4, e così di seguito:

$$D.4x = 4,$$
$$D.5x = 5,$$
$$D.6x = 6,$$

e in generale

$$D.ax = a.$$

Verifichiamo se quest'ultimo risultato generale è vero e se la derivata di ax è proprio a.

19. Derivata di ax. — Procediamo un po' più rapidamente per derivare ax. Mettiamo $x + \frac{1}{N}$ al posto di x; la funzione, che era ax, diverrà:

$$a\left(x + \frac{1}{N}\right) = ax + \frac{a}{N};$$

essa è aumentata di

$$\frac{a}{N}.$$

Moltiplichiamo per N questo incremento ed otterremo a; questo risultato è indipendente da N, ed è la derivata, come avevamo asserito.

Osservazione. — Se $a = 1$, si vede che $D.x = 1$, cioè che la derivata di x è 1.

20. Un facile problema. — Valutare l'accrescimento annuale dell'altezza di un albero sapendo che il numero che misura l'altezza in metri è sempre eguale al triplo del numero che misura l'età dell'albero in anni.

Soluzione. – Supponiamo che l'età sia, a un certo momento, eguale ad x anni.

L'altezza è nello stesso istante:

$$3x \text{ metri.}$$

Supponiamo ora che l'età aumenti di $\frac{1}{N}$ d'anno.

La nuova età dell'albero sarà $x + \frac{1}{N}$ e la sua nuova altezza, eguale al triplo dei suoi anni, sarà $3\left(x + \frac{1}{N}\right)$, cioè $3x + \frac{3}{N}$.

L'altezza, che era $3x$, è diventata $3x + \frac{3}{N}$.

Dunque l'albero è cresciuto di $\frac{3}{N}$ metri.

L'accrescimento per un N^{simo} d'anno essendo stato di $\frac{3}{N}$, l'accrescimento annuale è quindi di 3 metri, risultato indipendente da N.

Risposta. — L'albero cresce di 3 metri all'anno.

Osservazione. — Dire che un albero di altezza $3x$ ha per accrescimento annuale 3 e dire che la derivata di $3x$ è 3, è perfettamente la stessa cosa.

Non esiste alcuna differenza fra la misura d'un accrescimento unitario ed il calcolo d'una derivata.

Consiglio. - Non passate al capitolo successivo senza prima avere ritrovato da soli i risultati dei numeri 18 e 19.

CAPITOLO IV

DERIVATE DELLE POTENZE DI *X*

21. Richiamo della regola. — Non dimentichiamo che la derivata di una funzione è l'incremento della funzione riferito all'*unità di variabile*. Si calcola l'incremento per un N^{simo} di unità, poi lo si moltiplica per N. Il numero N cresce indefinitamente e per conseguenza la sua inversa $\frac{1}{N}$ tende a zero.

Altra cosa: avrete imparato come si sviluppa il quadrato o il cubo di $a + b$; ve lo ricorderò, poichè ce ne serviremo:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2,$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3.$$

Quando avremo da sviluppare le potenze di $x + \frac{1}{N}$ scriveremo analogamente:

$$\left(x + \frac{1}{N}\right)^2 = x^2 + \frac{2x}{N} + \frac{1}{N^2},$$

e

$$\left(x + \frac{1}{N}\right)^3 = x^3 + \frac{3x^2}{N} + \frac{3x}{N^2} + \frac{1}{N^3},$$

e per voi non sarà più una sorpresa.

Posto ciò, passiamo a derivare le potenze di x.

22. Derivata di x^2. — Mettiamo $x + \frac{1}{N}$ al posto di x; la funzione x^2 diventa:

$$\left(x + \frac{1}{N}\right)^2,$$

ossia, sviluppando questo quadrato,

$$x^2 + \frac{2x}{N} + \frac{1}{N^2}.$$

Essa era x^2; ora è aumentata di $\frac{2x}{N} + \frac{1}{N^2}$. Moltiplichiamo questo incremento per N, ed otteniamo: $2x + \frac{1}{N}$. Se ora N cresce indefinitamente la sua reciproca $\frac{1}{N}$ tende a zero e otteniamo la derivata: $2x$. Scriviamo questo risultato.:

$D.x^2 = 2x$. La derivata di x^2 è $2x$.

Decisamente **siamo sulla buona via; passiamo alla** terza potenza.

22 *bis*. Derivata di x^3. — Mettiamo $x + \frac{1}{N}$ **al** posto di x e **sviluppiamo il cubo; la funzione** x^3 diventa:

$$\left(x + \frac{1}{N}\right)^3 = x^3 + \frac{3x^2}{N} + \frac{3x}{N^2} + \frac{1}{N^3},$$

e siccome era x^3, **così ha aumentato di**

$$\frac{3x^2}{N} + \frac{3x}{N^2} + \frac{1}{N^3},$$

ciò che **moltiplicato per** N **diventa**:

$$3x^2 + \frac{3x}{N} + \frac{1}{N^2}.$$

Quando N **aumenta indefinitamente,** $\frac{3x}{N}$ **diventa** evanescente **e, a più forte ragione, lo diventa** $\frac{1}{N^2}$.

Rimane **quindi solo** $3x^2$, **che è la derivata.**

$D.x^3 = 3x^2$. **La derivata di** x^3 **è** $3x^2$.

Abbiamo **trovato le derivate di** x^2 **e** x^3; **per le** altre **potenze si procede nello stesso modo e si** ottiene la seguente tabella:

$$D.x^2 = 2x,$$
$$D.x^3 = 3x^2,$$
$$D.x^4 = 4x^3,$$
$$D.x^5 = 5x^4,$$

e generalizzando si ha:

$$D.x^m = mx^{m-1}.$$

Abbiamo dunque la regola:

Per derivare una potenza di x si diminuisce l'esponente d'una unità e si moltiplica la potenza di x così ottenuta per l'esponente primitivo.

Così per derivare x^8 diminuisco di 1 l'esponente, ciò che dà x^7, e moltiplico per 8, con che ho $8x^7$; parimenti:

$$D.x^{13} = 13\ x^{12} \text{ etc.}$$

Questa regola può essere stabilita anche direttamente, come vedremo più avanti.

23. Fattori numerici o costanti. — Abbiamo già osservato che la derivata di x è 1, quella di $2x$ è 2, quella di $8x$ è 8 e in generale quella di ax è a.

Constatiamo in un caso particolare quanto è vero in generale, e cioè che ogni numero che moltiplica la funzione, moltiplica la sua derivata. Controlleremo la verità di questa asserzione su qualche altro esempio. Partiamo da $D.x^2 = 2x$. È chiaro che se una grandezza x^2 cresce di $2x$ per unità di x, un'altra grandezza eguale ad x^2 crescerà della stessa quantità, e le due insieme (o due volte x^2), due volte di più; quindi

$$D.2x^2 = 2 \times 2x = 4x.$$

Parimenti il triplo d'una grandezza cresce tre volte di più:

$$D.3x^2 = 3 \times 2x = 6x.$$

Nello stesso modo:

$$D.5x^2 = 5 \times 2x = 10x.$$

Così essendo $3x^2$ la derivata di x^3, quella di $4x^3$ sarà quattro volte maggiore:

$$D.4x^3 = 4 \times 3x^2 = 12x^2.$$

Analogamente, per calcolare $D.7x^5$ dirò: la derivata di x^5 è $5x^4$, che moltiplicato per 7 dà $35x^4$:

$$D.7x^5 = 35x^4.$$

Tenete dunque bene a mente che se un numero moltiplica una grandezza, moltiplica anche la sua derivata.

È chiaro che i numeri saranno sovente raffigurati da lettere, ma ciò non modifica quanto abbiamo detto. Potremo dunque scrivere che

$$D.ax^2 = a \times 2x = 2ax,$$
$$D.bx^3 = b \times 3x^2 = 3bx^2,$$
$$D.cx^m = c\, mx^{m-1}.$$

24. Principio fondamentale e prima applicazione. — Abbiamo osservato che se una funzione x^2 cresce in ragione di $2x$ per ogni unità di variabile, quattro funzioni come x^2, riunite insieme, crescono quattro volte tanto, e quindi

$$D.4x^2 = 4\ (D.x^2) = 4 \times 2x.$$

L'incremento unitario di quattro funzioni riunite è dunque lo stesso come se fossero separate.

Il principio dell'indipendenza degli effetti degli accrescimenti si incontra sotto altri aspetti nelle scienze; esso rassomiglia a quello dell'indipendenza delle forze. Così per fare agire durante un tempo molto breve tre forze su di un punto materiale, si fa agire la prima per questo breve periodo di tempo, poi la seconda, poi la terza. In questo modo il corpo perviene allo stesso punto nel quale sarebbe arrivato se le tre forze avessero agito simultaneamente.

Senza aver la pretesa di dimostrare rigorosamente questo principio per il caso degli incrementi, l'ammetteremo nella forma che segue e ci limiteremo a giustificarlo intuitivamente nelle applicazioni.

Principio. — *Quando una grandezza contiene più quantità variabili, si può, per misurare l'incremento unitario totale, o derivata, fare crescere separatamente ciascuna variabile come se le altre fossero costanti.*

Spieghiamo questo principio fondamentale applicandolo per ritrovare, col procedimento da esso indicato, la derivata di x^2 che già conosciamo.

La funzione x^2 può esser scritta come segue:

$$x \times x,$$

ed esser interpretata come il prodotto di un primo fattore variabile x per un secondo fattore variabile x (poco importa che i due fattori siano eguali).

Supponiamo variabile solo il secondo fattore x; la sua derivata è 1, ma questa derivata dovrà essere moltiplicata per il primo fattore x, considerato come costante, e diviene $x \times 1$.

Supponiamo ora che sia variabile solo il primo fattore x; la sua derivata, che è 1, verrà moltiplicata per il secondo fattore x (che è ora considerato costante), e diverrà $1 \times x$.

Siccome nel prodotto $x \times x$ i due fattori sono variabili nello stesso tempo, la derivata sarà, pel principio suddetto, la somma dei risultati ottenuti, cioè:

$$x \times 1 + 1 \times x = 2x.$$

Ritroviamo che la derivata di x^2 è $2x$.

Meditate bene questo principio fondamentale; arriverete a percepirne l'evidenza senza formole.

Applichiamolo ancora alla funzione x^3 che può scriversi:

$$x \times x \times x.$$

Se i due primi fattori fossero costanti la derivata sarebbe:

$$x \times x \times 1 = x^2.$$

Ripetendo per tre volte questo ragionamento, si vede che la derivata è:

$$x^2 \times 3.$$

Dunque $D.x^3 = 3x^2$, come si sapeva.

Rivolgiamoci ora al caso generale:

$$x^m = x \times x \times x \times x \ldots\ldots \times x.$$

Ci sono m fattori; se uno solo di essi fosse variabile, la sua derivata 1 verrebbe moltiplicata per il prodotto degli altri $m-1$, e ciò darebbe: $1 \times x^{m-1}$. Questa operazione ripetuta m volte darà mx^{m-1}.

Dunque:

$$D.x^m = mx^{m-1}.$$

Si vede che il nostro principio fondamentale ci permette di derivare x^m in modo molto semplice. Abitualmente si ricorre alla formula del binomio, o di Newton, ma noi abbiamo preferito questa via. Lo stesso principio fondamentale dovrà venire ammesso intuitivamente più tardi per lo studio delle derivate parziali, quindi abbiamo ritenuto opportuno utilizzarlo fin d'ora.

Osservazioni sulle costanti che s'aggiungono. — È evidente che l'incremento di ciò che non varia è nullo e che la derivata di una costante isolata k è zero. Tuttavia dei gravi autori s'affannano a far variare la x per vedere di quanto aumenterà una costante additiva k.

Ciò equivale a risolvere il seguente problema: di quanto s'accresce una somma costante contenuta nel mio portamonete quando il pianeta Marte si avvicina a noi di un chilometro.

Mi direte che l'una non dipende dall'altro; lo stesso fra x e k.

Quindi qualunque costante aggiunta ad una espressione non cambia la derivata. Esempio:

$$D.(4x + k) = 4 + 0 = 4,$$

come se k non esistesse. Analogamente:

$$D.(a\,x^2 + b) = 2\,ax + 0 = 2\,ax,$$
$$D.(3\,x^3 + 7) = 9\,x^2 + 0 = 9\,x^2;$$

le costanti aggiunte non dànno contributo alla derivata.

Avremo sovente l'occasione di ricordarcene.

25. Derivata d'un radicale di x e della funzione $1/x$. Sia anzitutto da derivare $\sqrt[m]{x}$.

Mettiamo questa funzione sotto la forma $x^{\frac{1}{m}}$ ed applichiamo la regola delle potenze (se avete dimenticato le proprietà dei radicali leggete la nota che chiude questo capitolo).

Ecco un esempio: Vogliamo trovare la derivata di

$$y = \sqrt[3]{x}.$$

Scriviamo:

$$y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}},$$

e deriviamo con la regola ricordata nel paragrafo precedente (questa regola, veramente, è stata dedotta per valori interi e positivi dell'esponente m, ma vale per qualunque valore di m). Otterremo, diminuendo $\frac{1}{3}$ di una unità e moltiplicando per $\frac{1}{3}$,

$$D.\sqrt[3]{x} = D\ .\ x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}};$$

che è il risultato cercato.

Parimenti se cerchiamo la derivata di

$$y = \sqrt[5]{x^3}$$

scriveremo:

$$y = \sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}}.$$

diminuendo l'esponente $\frac{3}{5}$ di una unità e moltiplicando per $\frac{3}{5}$ si avrà la derivata

$$D \,.\, \sqrt[5]{x^3} = D\, x^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}{}^{-\frac{2}{5}}.$$

Osservazione. — La stessa regola ci permette di derivare la funzione $\frac{1}{x}$.

Infatti si può scrivere $\frac{1}{x} = x^{-1}$; quindi la derivata sarà $-\, x^{-2}$, ossia $\frac{-1}{x^2}$.

La derivata di $\frac{1}{x}$ è quindi $\frac{-1}{x^2}$.

Ciò è molto importante e va tenuto a mente.

Nota sui radicali e gli esponenti.

Ricordiamo, senza dimostrarle, alcune proprietà dei radicali e degli esponenti frazionari.

Dato il radicale $\sqrt[6]{a^4}$, si può dividere l'indice 6 e l'esponente 4 per il numero 2; il radicale non muta:

$$\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2};$$

è questo un mezzo di semplificazione.

Analogamente:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[1]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{m}{n}}.$$

poichè non si è fatto altro che dividere n ed m per n.

Nello stesso modo:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \quad \text{e} \quad \sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$$

Altra cosa; sapete che:

$$a^4 \times a^5 = a^9,$$

ossia che:

$$a^m\, a^n = a^{m+n}.$$

Invece:

$$\frac{a^4}{a^3} = a^{4-3} \quad \text{e} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Se i due esponenti son eguali all'unità, siamo in un caso particolare:

$$\frac{a^1}{a^1} = a^{1-1} = a^0,$$

e siccome $\frac{a^1}{a^1}$ è uguale a 1, ne segue che $a^0 = 1$. Qualsiasi numero elevato a zero dà l'unità.

Abbiamo ancora che $\frac{a^3}{a^5} = a^{-2} = a^{0-2}$. Siccome $a^0 = 1$, si vede che $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$. Analogamente $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$, e in generale $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$. Parimenti $\frac{1}{a} = a^{-1}$ e $\frac{1}{x} = x^{-1}$, come abbiamo scritto nel numero 25. Se avete qualche dubbio prendete una matita e ripetete gli esempi qui esposti ed in un quarto d'ora sarete a cavallo.

Problema analogo a quello risolto nel numero 20. — Valutare l'accrescimento d'un albero la cui altezza in metri è espressa dallo stesso numero del quadrato della sua età in anni.

Sia x l'età dell'albero in un certo momento.

La sua altezza è dunque x^2.

Supponiamo che l'età aumenti di $\frac{1}{N}$ d'anno

La nuova età sarà $x + \frac{1}{N}$, e la nuova altezza:

$$\left(x + \frac{1}{N}\right)^2 = x^2 + \frac{2x}{N} + \frac{1}{N^2}.$$

L'altezza, che era x^2, è dunque aumentata di $\frac{2x}{N} + \frac{1}{N^2}$. L'accrescimento essendo $\frac{2x}{N} + \frac{1}{N^2}$ per $\frac{1}{N}$ d'anno, esso sarà in un anno N volte maggiore, cioè $2x + \frac{1}{N}$, e diviene, quando N cresce indefinitamente, $2x$.

Risposta. — L'accrescimento unitario è $2x$, cioè eguale in ogni istante al doppio dell'età.

Così a 2 anni l'albero cresce in ragione di 4 metri all'anno, a 3 anni, in ragione di 6 metri all'anno, a 3 anni e $\frac{1}{2}$ in ragione di 7 metri all'anno, ecc., ecc.

Osservazione. — Confrontando questo calcolo con quello del numero 22 si vede che sono identici; infatti non c'è nessuna differenza fra la misura d'un accrescimento ed il calcolo d'una derivata.

Dire che l'accrescimento d'un albero di altezza x^2 è $2x$ e dire che la derivata di x^2 è $2x$ è dire esattamente la stessa cosa.

CAPITOLO V

SOMME, PRODOTTI, QUOZIENTI

26. La derivata di y si indica con y'. — Nel capitolo precedente abbiamo indicate le funzioni con la loro stessa espressione algebrica.

Abbiamo detto: la funzione $4x^5$ oppure ax^m. Era per non sviare il principiante il quale alle volte s'imbroglia fra x ed y.

Ma quando si vuole abbreviare la scrittura, si sostituiscono le parole: *la funzione* con la lettera y e le parole: *derivata della funzione* con la stessa lettera ma accentata, cioè con y' che si dice *y prima*. Così diremo che y è la funzione e che y' è la sua derivata.

Se dobbiamo derivare $y = 4x^3$, scriveremo:

$$y' = 12x^2.$$

Se dobbiamo derivare $y = 3x^2$, scriveremo:

$$y' = 6x.$$

La stessa lettera y serve in tutti i casi, benchè non indichi sempre la stessa espressione, poichè rappresenta $4x^3$ nel primo caso e $3x^2$ nel secondo.

La lettera y indica la funzione di cui si parla e y' la sua derivata.

Quando, *in uno stesso problema*, si incontrano più funzioni, si indicano queste con lettere differenti come u, v, z, t, ecc. (ultime lettere dell'alfabeto, poichè si tratta di variabili).

27. Derivata d'una somma. — Consideriamo una funzione costituita da una somma, come la seguente:

$$3\,x^5 + 2\,x^3 + \tfrac{1}{2}\,x + 7,$$

nella quale i diversi termini contengono la variabile x; il totale si chiamerà y, poichè dipende da x, ed è quello che studiamo.

Sia dunque:

$$y = 3\,x^5 + 2\,x^3 + \tfrac{1}{2}\,x + 7.$$

Si tratta di calcolare la derivata di questa espressione.

Ora la derivata di $3x^5$ è $15x^4$;
la derivata di $2x^3$ è $6x^2$;
la derivata di $\frac{1}{2}x$ è $\frac{1}{2}$;
la derivata di 7 è 0;

In totale la derivata di y è quindi:

$$y' = 15\,x^4 + 6\,x^2 + \tfrac{1}{2}.$$

Per calcolare la derivata di una somma si sommano le derivate di tutti i termini, ricordando che la derivata d'un termine costante è nulla.

Se indichiamo i termini variabili con u, v, z termine costante con a, scriveremo

$$D.(u + v + z + a) = u' + v' + z'.$$

Facciamo una applicazione. Deriviamo la funzione

$$y = x^2 + ax + c.$$

Deriviamo ciascun termine con le regole che ci sono note e sommiamo i risultati:

$$D.x^2 = 2x,$$
$$D.ax = a,$$
$$D.c = 0 \text{ (poichè } c \text{ è una costante).}$$

Totale:

$$D.(x^2 + ax + c) = 2x + a.$$

Riunendo le nozioni già acquisite potrete ora trovare le derivate di numerose espressioni algebriche elementari.

28. Derivata di un polinomio. — Ricordiamo che un polinomio è una espressione algebrica formata da differenti termini separati dai segni $+$ o $-$.

In base a quanto abbiamo detto sulle somme e differenze, ci basterà calcolare la derivata di ciascun termine, applicando le regole già trovate.

Sia da trovare la derivata di:

$$y = 8\,x^5 + 3\,x^4 - \frac{2}{5}\,x^3 + x^2 - 72.$$

Sappiamo che:

$$D.8\,x^5 = 40\,x^4 \qquad D.3\,x^4 = 12\,x^3, \text{ ecc., ecc.;}$$

avremo quindi:

$$D\,.\,y = 40\,x^4 + 12\,x^3 - \frac{6}{5}\,x^2 + 2\,x.$$

Osserviamo che il termine costante 72 dà zero.

Facciamo ancora qualche esempio.
Sia da derivare:

$$y = \frac{2}{5}\sqrt{x} - 7\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{49}.$$

Il primo termine equivale a:

$$\frac{2}{5}\,x^{\frac{1}{2}},$$

e la sua derivata è:

$$\frac{1}{5}\,x^{-\frac{1}{2}} \quad \text{ossia} \quad \frac{1}{5\sqrt{x}}.$$

Il secondo termine si può scrivere:

$$-7x^{\frac{1}{3}}$$

e la sua derivata è:

$$-\frac{7}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

ossia:

$$-\frac{7}{3\sqrt[3]{x^2}};$$

l'ultimo termine $\sqrt[4]{49}$ essendo costante, non dà nulla.

La derivata possederà quindi solo due termini:

$$D.y = \frac{1}{5\sqrt{x}} - \frac{7}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Consideriamo ora un polinomio di grado m scritto in modo generale:

$$y = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots + Px + Q.$$

Si avrà:

$$y' = mAx^{m-1} + (m-1)Bx^{m-2} + (m-2)Cx^{m-3} \ldots + P.$$

Osserviamo che l'ultimo termine Q non ha dato niente, perchè non contenendo la variabile x è un termine costante la cui derivata è nulla.

29. Derivata d'un prodotto. — Non si tratta di un prodotto della forma ax^m, caso già trattato, ma d'un prodotto di funzioni di x, come il seguente:

$$y = (x^4 + x^2 - a)\ (x^3 - \sqrt{x}),$$

che si vorrebbe derivare senza effettuarlo.

Ciascun fattore in x è una funzione di x che sapremmo derivare se fosse sola. Chiamiamo il primo fattore u e il secondo v (le derivate saranno u' e v'). Il nostro prodotto si scrive.

$$y = uv.$$

Dobbiamo far crescere u e v e misurare l'accrescimento del prodotto. Invece di far crescere u e v tutti e due ad un tempo e di valutare l'incremento risultante, li faremo crescere l'uno dopo l'altro, come indicato dal principio fondamentale del n. 24.

Se nel prodotto $y = uv$, u fosse costante e v la sola variabile, la derivata del prodotto sarebbe di conseguenza uv'. Se ora supponessimo (in uv) u variabile e v costante, la derivata del prodotto sarebbe $u'v$.

Ora, nel prodotto considerato, u e v sono variabili contemporaneamente e l'incremento, essendo uv' per una causa e vu' per un'altra, sarà in totale $uv' + vu'$.

Dunque:

$$D.uv = uv' + vu'.$$

Cioè per derivare un prodotto di due fattori bisogna moltiplicare la derivata di ciascun fattore per l'altro fattore e sommare i prodotti.

Se i fattori sono più di due, occorre moltiplicare la derivata di ciascun fattore per tutti gli altri e sommare i prodotti così ottenuti. Il ragionamento è lo stesso.

Così:

$$D.uvzt = u'vzt + uv'zt + uvz't + uvzt'.$$

Non si ha che da scrivere il prodotto tante volte quanti sono i fattori e nello stesso ordine. Poi si accenta la prima lettera del primo gruppo, la seconda del secondo, la terza del terzo, ecc.

30. Applicazione ad un prodotto non eseguito. — Consideriamo un prodotto di due fattori:

$$y = (x^4 + 6)\ (x^5 - 3).$$

Poniamo:

$$x^4 + 6 = u \text{ e } x^5 - 3 = v.$$

La regola che avete imparata dà:

$$y' = u'v + v'u = 4x^3\,(x^5 - 3) + 5\,x^4\,(x^4+6)$$

ossia, eseguendo le operazioni indicate,

$$y' = 9\,x^8 + 30\,x^4 - 12\,x^3.$$

Verifica:

Si poteva eseguire il prodotto prima di fare la derivazione. Avremmo avuto:

$$y = (x^4 + 6)\,(x^5 - 3) = x^9 + 6x^5 - 3\,x^4 - 18,$$

da cui:

$$y' = 9\,x^8 + 30\,x^4 - 12\,x^3.$$

È lo stesso risultato che abbiamo già trovato.

31. Derivata di $\frac{1}{v}$. — Non si tratta d'una frazione avente la forma $\frac{1}{x}$, ma di una frazione come $\frac{1}{4\,x^2}$ oppure $\frac{1}{x+4}$ e in generale d'una frazione avente per numeratore l'unità e per denominatore una funzione di x.

Al numero 25 abbiamo imparato a derivare $\frac{1}{x}$; la derivata era:

$$\frac{-1}{x^2}.$$

Dunque:

$$D\,.\frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2}.$$

Demmo cioè il segno meno al numeratore ed elevammo il denominatore al quadrato. Ora se invece di x, il denominatore è una funzione di x, si dovrà sempre operare nello stesso modo ma moltiplicare il tutto per la derivata del denominatore. Così:

$$D \cdot \frac{1}{2x} = \frac{-1}{4x^2} \times 2.$$

Rendo negativo il numeratore, elevo $2x$ al quadrato, ciò che dà $4x^2$ al denominatore, e moltiplico il tutto per 2, che è la derivata del denominatore $2x$.

Così:

$$D \cdot \frac{1}{3x^2} = \frac{-1}{9x^4} \times 6x$$

e in generale:

$$D \cdot \frac{1}{v} = \frac{-1}{v^2}\, v'.$$

Ciò verrà dimostrato più avanti nel cap. VIII, sul quale ci permettiamo di anticipare un poco.

32. Derivata d'un quoziente $\frac{u}{v}$. — Si tratta di derivare un quoziente di due funzioni di x, simile a questo:

$$\frac{3x^4}{\sqrt{x}},$$

o ancora:

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1}.$$

Ragioniamo sul caso generale e indichiamo con u il numeratore e con v il denominatore.

Per derivare $y = \frac{u}{v}$ consideriamolo come un prodotto: $y = u \times \frac{1}{v}$.

Per derivare un prodotto, bisogna moltiplicare la derivata di ciascun fattore per l'altro fattore e sommare i prodotti ottenuti. Ricordiamo anzitutto che la derivata di $\frac{1}{v}$ è eguale a $\frac{-1}{v^2}\ v'$.

La derivata totale comprenderà:

1° La derivata del primo fattore moltiplicata per il secondo:

$$u' \frac{1}{v}.$$

2° La derivata del secondo fattore moltiplicata per il primo:

$$\frac{-1}{v^2} \cdot v'u.$$

In totale:

$$y = \frac{u'}{v} - \frac{v'u}{v^2}.$$

Moltiplicando il numeratore e il denominatore della prima frazione per v, ed eseguendo poi la differenza delle due frazioni, otteniamo:

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Questa è la derivata d'un quoziente.

Abitualmente la si impara a memoria e si sbaglia sovente nell'applicarla. Bisogna perciò saperla dedurre.

33. Esempio ed osservazione. — Esempio: sia da derivare:

$$y = \frac{3x^2 + 2}{2x - 3}.$$

Poniamo:

$$3x^2 + 2 = u \quad \text{e} \quad 2x - 3 = v.$$

Applichiamo la formola:

$$D \cdot \frac{u}{v} = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

ed avremo:

$$y' = \frac{6x(2x - 3) - 2(3x^2 + 2)}{(2x - 3)^2},$$

ossia, eseguendo le operazioni indicate,

$$y' = \frac{6\,x^2 - 18\,x - 4}{(2\,x - 3)^2}.$$

Se non riuscite a tenere a mente la formola del quoziente vi consiglio d'abituarvi a ricostruirla partendo dalla formola:

$$D\,.\frac{1}{v} = \frac{-1}{v^2}\,v',$$

come abbiamo fatto al numero precedente. Avrete così da ricordarvi soltanto una formola facile e del resto molto utile per se stessa.

CAPITOLO VI

LINEA INTEGRALE E LINEA DERIVATA VARIAZIONI

34. La curva delle pendenze come derivata dell'altitudine. — Rappresentiamo con la linea *P S T* la sezione d'una collina situata fra due valloni *P* e *T* (fig. 14); la linea *P S T* rappresenterà, per es., il profilo longitudinale d'un ripido sentiero che supera la collina.

Sulla retta Ox vennero segnate le distanze in ettometri (ben inteso misurate orizzontalmente), su Oy le altitudini in ettometri. Supponiamo che Ox sia al livello del mare.

L'altezza o altitudine è una grandezza variabile. In *P* sia di 450 metri; in *S* circa 700 e in *T* press'a poco 550 metri.

Quando si parte dall'origine *P* e si segue il sentiero verso *S*, l'altezza varia man mano che varia la distanza; l'altezza è una funzione della distanza.

L'altezza è la funzione.

La distanza è la variabile.

Sapete come fa un ingegnere per misurare una pendenza *del tanto per cento?* Egli misura di quanto la strada monta o discende per ettometro.

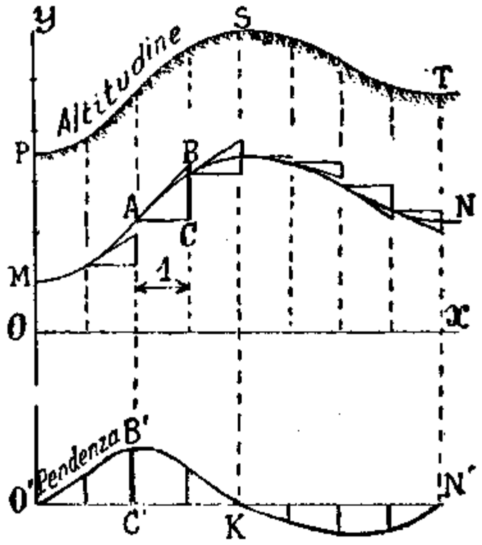


Fig. 14.

E chiama *pendenza* l'aumento d'altezza per unità di distanza.

La pendenza è l'incremento d'altezza per unità di variabile; è quanto abbiamo chiamato una derivata.

35. Derivazione grafica. — La curva $P\ S\ T$ rappresenta la funzione « altitudine ». Deduciamone la funzione « pendenza ». Non è cosa difficile.

Anzitutto, per non ingombrare la figura, spostiamo il nostro profilo cambiando l'origine. Se PST rappresenta le altezze sul livello del mare, $M\ N$ le rappresenterà al di sopra del livello, ad esempio, del fiume.

È evidente che in questo spostamento le pendenze non hanno variato (ciò ci servirà).

Misuriamo la pendenza del profilo $M\ N$ in ogni punto, anzitutto nel punto A.

Nel punto A la linea è curva, la sua pendenza è quindi la stessa di quella della sua tangente; conduciamo la tangente $A\ B$ e per imitare l'ingegnere misuriamo di quanto essa monta per ettometro.

Portiamo orizzontalmente $A\ C$ che rappresenta un ettometro. $C\ B$ sarà, in vera grandezza, la misura della pendenza.

Nel punto A la strada monta, per ettometro, di $C\ B$. Quindi $C\ B$ è la derivata dell'altitudine nel punto A.

Portiamola sotto al punto A in $C'\ B'$. Facciamo la stessa cosa in ciascun punto ed otterremo, congiungendo i punti ottenuti, la curva $O'\ B'\ N'$ o curva derivata della curva $M\ A\ N$.

Essa è pure la curva delle pendenze.

36. Proprietà della derivata. — In M la strada non monta nè discende; la pendenza o derivata è nulla. Ecco perchè in O' la curva derivata possiede un'ordinata nulla.

Fra il punto M e la sommità della collina la funzione altitudine aumenta, è cioè crescente; abbiamo una pendenza positiva, la strada monta: « la derivata di una funzione crescente è positiva ».

Ecco perchè, in questo spazio, la curva O' B' K si mantiene al di sopra di O' x', ciò che vuol dire che la derivata o pendenza è positiva.

Sorpassata la sommità, la funzione altitudine diminuisce fino in N; la strada scende, la pendenza è negativa (discesa): « la derivata d'una funzione decrescente è negativa ».

La curva derivata è in questa regione al di sotto dell'asse delle ascisse.

Consideriamo ora la sommità; la figura 14 mostra che vi è un punto nel quale prima di passare dalla salita alla discesa si cammina in piano. Si ha il massimo dell'altitudine, e la pendenza è nulla; lo vediamo nel punto K ove essa è zero: « quando una funzione passa per il suo massimo, la sua derivata s'annulla ».

Parimenti l'esame dei valori della pendenza in M ed N ci permette di dire: « quando una funzione passa per il suo minimo la derivata s'annulla ».

Infine, osserviamo che la curva d'altitudine ha lo stesso profilo e le medesime pendenze sia che la si prende in P S T od in M N.

Quindi il tracciare la curva derivata partendo dalla prima o dalla seconda è tutt'uno; ciò che si esprime dicendo: « due funzioni che non differiscono che per una costante possiedono la stessa derivata ».

37. Riassunto delle proprietà della derivata e loro equivalenti nel linguaggio comune.

La derivata d'una costante è nulla.	Quando la strada è orizzontale la sua pendenza è nulla.
La derivata d'una funzione crescente è positiva.	Quando la strada monta la sua pendenza è positiva.
La derivata d'una funzione decrescente è negativa.	Quando la strada discende la sua pendenza è negativa.
Quando una grandezza passa per un minimo od un massimo la derivata è nulla.	Nel punto più alto della salita o nel punto più basso della discesa, la pendenza della strada è nulla.
Due funzioni che non differiscono che per una costante hanno la stessa derivata.	I due profili paralleli hanno la stessa pendenza.

38. Linea integrale e funzione integrale o primitiva. — Ancora una parola difficile per esprimere una cosa semplice.

Sapete già che la curva derivata è la curva che rappresenta la pendenza (qui in ettometri per ettometro).

Ora la curva integrale è precisamente la curva dell'altitudine, il profilo della strada, la curva ad cui eravamo partiti, cioè la curva $P\,S\,T$ (o la curva $M\,N$ che fa lo stesso).

Quando si ha la curva di una funzione (qui la altitudine) si chiama «curva (linea) derivata» la curva le cui ordinate rappresentano in ciascun punto la derivata della funzione.

La curva della funzione da cui si era partiti prende il nome di curva (linea) integrale o curva primitiva.

Integrale algebrico. — Sappiamo che la funzione x^2 ha per derivata $2x$.

Inversamente $2x$ ha per integrale x^2 (a meno di una cosa che vedremo più avanti).

Integrale della funzione $2x$ è un'altra funzione x^2 che ammette $2x$ come derivata.

Quindi si chiama integrale d'una derivata la funzione *primitiva* da cui è nata, donde il nome di funzione primitiva pure dato all'integrale.

Algebricamente: derivare una funzione è cercare la sua derivata.

Integrare una derivata è ritrovare la funzione.

39. Integrazione grafica. — Conoscendo la curva d'altitudine, il dedurne la curva della pendenza o curva derivata è ciò che si chiama fare una derivazione grafica. Abbiamo già imparato questa operazione al n. 35.

Inversamente, conoscendo la curva delle pendenze si può ricostruire la curva del profilo: è ciò che si chiama integrazione grafica. L'impareremo più tardi. A noi basta per il momento di sapere che la si può fare.

Costante d'integrazione. — Ora acquisteremo intuitivamente una nozione che ci servirà più tardi.

La curva $P\,S\,T$ e la curva $M\,N$, le cui ordinate differiscono d'una costante, hanno la stessa pendenza e la stessa curva derivata. Sarebbe lo stesso per qualunque altra curva identica a $P\,S\,T$, ottenuta da questa con uno spostamento verticale qualunque.

Se dunque si dà la curva delle pendenze si può ricostruire il profilo del terreno, ma non si sa ove incominciarlo, se in M o in P o più in alto o più in basso. Tracciandolo a partire da un punto qualunque, esso darà le altitudini dei punti del terreno. esatte *a meno di una costante*.

Parimenti le funzioni x^2 o $x^2 + a$ o $x^2 + b$ hanno tutte la stessa derivata $2x$; è dunque chiaro che $2x$ avrà per integrale sia x^2, sia $x^2 + a$, sia $x^2 + b$, sia qualunque altra funzione, somma di x^2 e di una costante indeterminata che si usa designare con C.

Dunque l'integrale della funzione $2x$ è $x^2 + C$; esso risulta evidentemente definito a meno della costante additiva arbitraria C.

40. La velocità derivata della distanza o spazio. — Dicesi spazio il cammino percorso da un mobile. Lo si misura in metri, in chilometri, o in altro modo, a partire da una origine; è dunque una distanza.

La distanza o spazio è una funzione del tempo.

Ora la velocità è l'aumento dello spazio nell'unità di tempo. E siccome la derivata di una funzione è precisamente l'aumento della funzione per unità di variabile, ne consegue, come abbiamo già detto, che la velocità è la derivata dello spazio rispetto al tempo. Inversamente lo spazio è l'integrale della velocità.

Nella fig. 15 si è rappresentata la curva degli spazi d'un treno che parte da Milano alle 12. Le distanze o spazi sono sull'asse delle ordinate, perchè lo spazio è la funzione; i tempi sono sull'asse delle ascisse, perchè il tempo è la variabile. La curva della velocità è più sotto. Si passa dalla prima alla seconda mediante una derivazione grafica.

Come poco fa, si può verificare che la curva della velocità misura la «pendenza» della curva degli spazi. Le fermate alle stazioni sono dei tratti piani della curva degli spazi e gli zeri della curva delle velocità.

41. L'arricchimento derivata del patrimonio. — Immaginiamo un patrimonio che varia in modo continuo; non è molto verosimile ma lo si può immaginare, e ciò basta.

Sia, se volete, e per convenzione, un patrimonio liquido (fig. 16).

Chiamiamo « arricchimento » l'accrescimento del patrimonio in un mese. In tal caso si può dire che

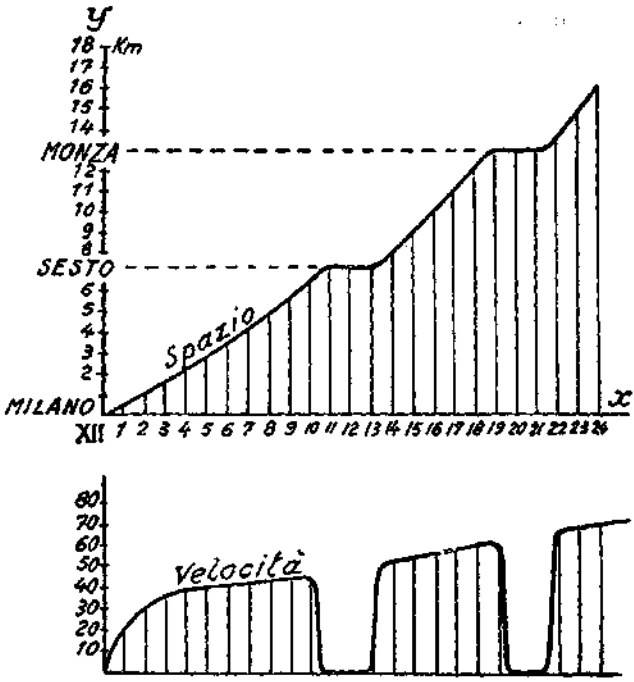


Fig. 15.

l'arricchimento è la derivata del patrimonio rispetto al tempo. Dire che nel punto *P* l'arricchimento è di 950 lire al mese, equivale a dire che in un certo momento del secondo mese il patrimonio sta crescendo in ragione di 950 lire al mese, ove la misura è, ben inteso, istantanea.

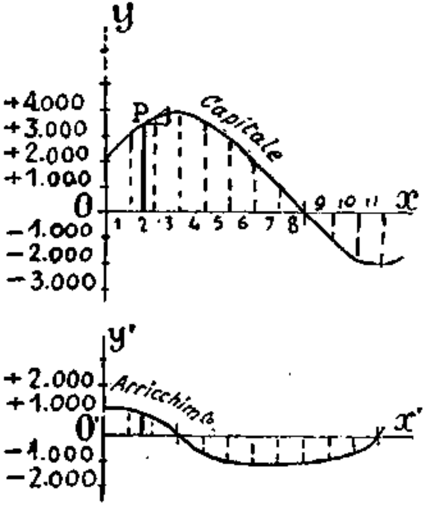


Fig. 16.

42. L'ingrassamento derivata del peso. — Se tracciamo la curva del peso d'un montone in chilogrammi (fig. 17) e sotto di essa la curva dell'ingrassamento in chilogrammi al mese, la seconda curva è la derivata della prima. Siccome l'ingrassamento è in ciascun istante l'aumento del peso per unità di tempo, esso rappresenta pure la derivata del peso rispetto al tempo. È pacifico che si tratta d'una funzione « peso » supposta continua per defi-

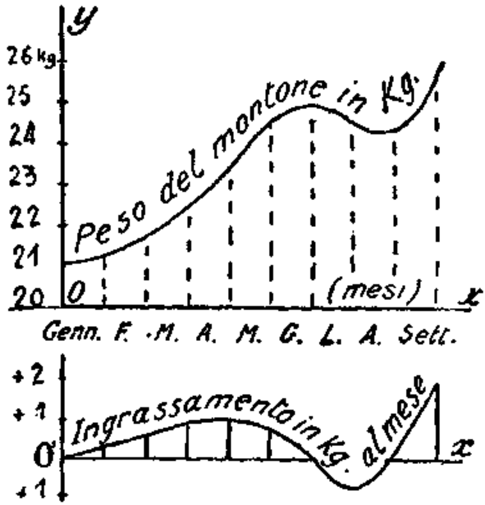


Fig. 17.

nizione. Naturalmente non è qui questione di esperienze reali.

Nello stesso modo come il maestro suddivide in frazioni eguali delle torte immaginarie, noi rivendichiamo altamente il diritto di manipolare dei patrimoni illusorii e d'ingrassare dei montoni convenzionali.

43. Variazioni d'una funzione algebrica. — Studiare tutti i valori che può assumere una funzione di x per tutti i valori di x è ciò che si chiama studiare le variazioni della funzione.

Generalmente se ne fa una tabella... che l'allievo comprende male perchè pecca in evidenza.

Il miglior metodo per studiare le variazioni di una funzione consiste nel tracciare la sua curva e quella della sua derivata e di vedere come l'una dipende dall'altra.

Sia da studiare la funzione:

$$y = \frac{1}{4} x^3 - x,$$

la cui derivata è:

$$y' = \frac{3}{4} x^2 - 1.$$

Costruiamo queste due curve l'una sotto all'altra ed esaminiamole, servendoci della geometria e del calcolo (fig. 18). Ritroveremo le nozioni già acquisite.

Per valori negativi della variabile, inferiori ad un valore $-l$ che determineremo, la funzione è crescente e la sua derivata positiva. Indi la funzione raggiunge un massimo ed allora la derivata passa per lo zero. In seguito la funzione decresce e la sua derivata è negativa. Poi incontra un minimo e la sua derivata è nulla; indi cresce e la sua derivata è positiva.

I punti notevoli di questo profilo sono evidentemente il massimo ed il minimo. Cerchiamo la loro distanza dell'asse delle y. Poichè in tali punti la derivata della funzione è nulla, ce ne serviremo; scriviamo:

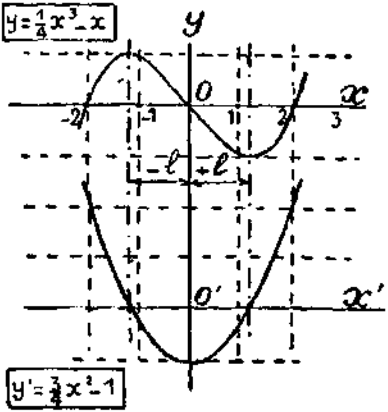


Fig. 18.

$$\frac{3}{4} x^2 - 1 = 0,$$

da cui:

$$\frac{3}{4} x^2 = 1, \qquad x^2 = \frac{4}{3}$$

ed estraendo la radice quadrata si ottengono i due seguenti valori di x:

$$x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} = \pm\ 1{,}15.$$

Chiamando $+l$ e $-l$ questi valori particolari, tracciamo da una parte e dall'altra di Oy due ordinate distanti $+l$ e $-l$ dall'origine, e che rappresentino le ordinate del massimo e del minimo. Queste si otterranno mettendo i valori $\pm\ 1{,}15$ al posto di x nella espressione della y.

Diamo, poichè così si usa, la tabella delle variazioni della funzione.

x	y'	y
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
	positiva	cresce
$-1{,}15$	nulla	massimo
	negativa	decresce
$+1{,}15$	nulla	minimo
	positiva	cresce
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

44. Proprietà della tangente. — Consideriamo un punto A d'una curva integrale o primitiva C ed il punto A' della curva derivata situato sulla stessa ordinata (fig. 19).

Conduciamo la tangente nel punto A alla curva integrale e portiamo $AB = 1$; il segmento BD misura la derivata nel punto A. Ma questa è misurata anche da RA'.

Dunque $BD = RA'$. Conduciamo per A' una parallela ad NM, i due triangoli tratteggiati sono eguali da cui $PR = 1$.

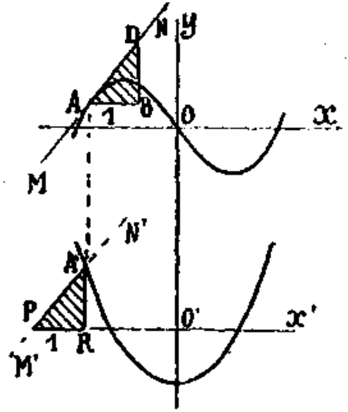


Fig. 19.

Ne consegue un mezzo grafico di condurre una tangente alla curva C di cui si conosce la curva derivata. Sia da tracciare la tangente nel punto A; si conduce l'ordinata RA', si porta $PR = 1$ e si traccia $M'N'$ che dà la direzione cercata.

Basta condurre per A una parallela a $M'N'$ per avere la tangente alla curva in A.

La proprietà della tangente è usata in certi apparecchi d'integrazione.

45. Ciò che bisogna vedere nelle linee. — La linea dev'essere considerata come la congiungente delle estremità delle sue ordinate verticali. Essa serve unicamente a descrivere i diversi stati d'una grandezza. Ciascuno di questi stati può essere raffigurato con una freccia diretta dal basso all'alto quando la grandezza è positiva, dall'alto al basso quando essa è negativa.

L'ascissa serve a mettere al loro posto questi valori successivi della grandezza, ma il suo ufficio è secondario. La parte principale è fatta dall'ordinata che rappresenta la grandezza, la funzione.

Insomma la curva d'una funzione ci racconta la storia d'una grandezza, per esempio, nel tempo o nello spazio.

La curva derivata completa utilmente queste informazioni, poichè mette in evidenza la qualità primordiale della grandezza: l'incremento (la grandezza è ciò che può aumentare o diminuire).

Date un'occhiata alla fig. 20, nella quale anche la curva derivata non parla che con le sue ordinate. Osservate le sue frecce: in quei punti nei quali sono rivolte verso l'alto la funzione cresce; in quelli nei quali sono rivolte verso il basso, la funzione decresce e ciò tanto più quanto più sono lunghe. Le frecce della derivata sono nulle? La funzione non monta nè discende, dunque essa si trova nei suoi punti più alto o più basso.

Come distinguere i due casi l'uno dall'altro?

Si guarda se la curva derivata passa per lo zero montando (*minimo*) o discendendo (*massimo*).

In A e C la derivata aumenta, quindi si ha un *minimo*; in D la derivata diminuisce, quindi si ha un *massimo*.

Per ricordarvene pensate ad una strada. Arrivando in cima al pendio la pendenza passa dal + al —, dunque diminuisce.

Al piede della collina la pendenza passa dal — al +, dunque aumenta.

Ora la pendenza di una curva è la sua derivata

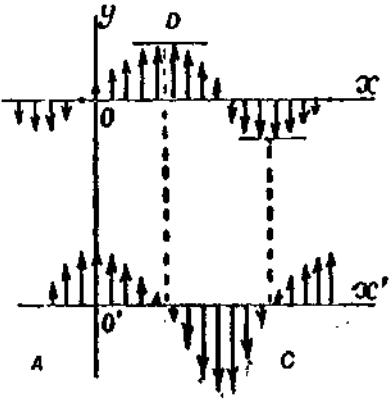


Fig. 20.

Si potrebbe ragionare nello stesso modo pensando alla funzione « patrimonio ». Quando passa per il suo punto più basso l'arricchimento aumenta. Quando passa per il suo punto più alto l'arricchimento diminuisce.

Ora divertitevi a tracciare molte curve: non v'è esercizio più interessante ed istruttivo.

Calcolate un poco, disegnate molto e meditate ancora di più.

Per assimilare bene una teoria non basta rimontare alle definizioni ed agli assiomi; bisogna rimontare fino alla natura delle cose.

Il disegno vi aiuterà molto.

CAPITOLO VII

LE DERIVATE SUCCESSIVE

46. Incremento dell'incremento. — Siccome si tratta d'una nozione nuova, riprendiamo i nostri esempi concreti e ritorniamo al nostro montone, quello di cui abbiamo studiata la curva del peso al numero 42.

Abbiamo chiamato « ingrassamento » la quantità di cui varia il peso nell'unità di tempo, ed abbiamo visto che l'ingrassamento così definito è la derivata del peso.

Chiamiamo ora « miglioramento » la quantità di cui varia l'ingrassamento stesso nell'unità di tempo, con che il « miglioramento » può essere tanto positivo che negativo.

Se misuriamo il « miglioramento » per tempi molto brevi, potremo tracciare la curva continua del « miglioramento » che a sua volta è la derivata della curva del « peso ».

Diremo allora che il miglioramento è la derivata seconda del peso.

Diamo un'idea delle sue variazioni nella fig. 21. Supponiamo che la curva y rappresenti il « peso ».

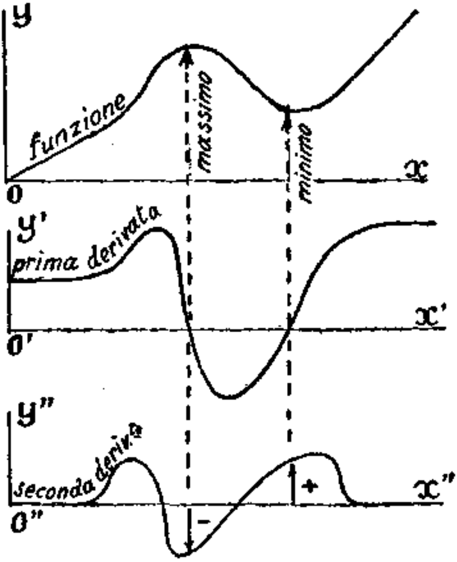


Fig. 21.

La curva derivata y' rappresenterà l' « ingrassamento », e la derivata di questa il « miglioramento ».

In principio, il peso aumenta regolarmente (linearmente), l'ingrassamento è positivo e *costante* e quindi il miglioramento è *nullo*. Infatti l'ingrassamento non cresce nè diminuisce, e pertanto non v'è miglioramento, nè positivo nè negativo.

Abbiamo invece un miglioramento positivo tutte le volte che l'ingrassamento è crescente ed un miglioramento negativo (che potrebbe chiamarsi peggioramento) quando l'ingrassamento è decrescente.

Si vede che non è più difficile concepire in modo concreto la derivata d'una derivata che la derivata d'una funzione qualunque.

Osservazione. — Ricorderete come la derivata prima ci ha servito (N. 45) a distinguere i massimi dai minimi.

A destra del massimo la derivata decresce.

A destra del minimo la derivata cresce.

Ma nel primo caso la derivata seconda è negativa e nel secondo la derivata seconda è positiva.

Dunque nel caso di dubbio relativamente ad un valore estremo, si calcola la derivata seconda per il valore di x considerato. Se è negativa si ha un massimo, se è positiva si ha un minimo. Ciò è mostrato chiaramente dalla fig. 21.

47. Altri casi concreti. — Invece di supporre che la prima curva rappresenti un peso variabile possiamo anche immaginare ch'essa raffiguri la sezione verticale di un profilo montagnoso; è l'esempio, già studiato, della « funzione altitudine ». In questo caso sappiamo che la curva derivata rappresenta la pendenza, derivata prima dell'altitudine rispetto all'ascissa. In quanto alla derivata seconda y'', questa rappresenterà la variazione della pendenza. L'esistenza di questa derivata seconda ci mostra che la funzione primitiva presentava non soltanto delle variazioni d'altitudine (cioè una declività) ma *delle variazioni di declività*, e quest'ultime indicano che v'è una curvatura.

Se la funzione primitiva fosse lineare la derivata seconda sarebbe nulla. Ciò si può dedurre algebricamente, poichè se la funzione primitiva fosse lineare, sarebbe della forma $ax + b$, la sua derivata prima sarebbe a, e la derivata della costante a sarebbe zero. L'annullamento della derivata seconda ci dice che il diagramma della funzione non è curvo: sappiamo infatti che esso è rettilineo.

48. Velocità ed accelerazione. — Possiamo anche immaginare che la curva y della fig. 21 rappresenti, come al numero 40, la curva degli spazi percorsi da un mobile (le distanze dall'origine essendo portate in ordinate ed i tempi in ascisse).

In questo caso sappiamo che la curva y' rappresenterà la funzione velocità, derivata dello spazio rispetto al tempo. In quanto alla curva y'', rappresenterà l'accelerazione, che è la variazione della velocità. L'accelerazione può venire indifferentemente considerata come la derivata prima della velocità o la derivata seconda dello spazio.

La parola accelerazione è la sola esistente per designare correttamente una derivata seconda come la parola velocità è la sola usuale che designa correttamente una derivata prima. La funzione « spazio » (distanza) è quindi a questo riguardo privilegiata, ciò che si spiega con l'importanza del suo studio in meccanica.

Applichiamoci al calcolo delle derivate successive.

49. Calcolo delle derivate successive. — Quando si sa trovare la derivata prima d'una funzione, il calcolo delle derivate successive non presenta alcuna difficoltà. Basta applicare le stesse regole.

Sappiamo che la derivata prima di x^4 è $4x^3$.

Sappiamo anche che la derivata di $4x^3$ è $12x^2$. Dunque $12x^2$ sarà la derivata seconda di x^4. Possiamo fare la seguente tabella:

Funzione	y	$= x^4$
Derivata prima...........	y'	$= 4\,x^3$
Derivata seconda	y''	$= 12\,x^2$
Derivata terza	y'''	$= 24\,x$
Derivata quarta	y^{IV}	$= 24$
Derivata quinta	y^{V}	$= 0.$

Osserviamo che la derivata quinta è nulla. Questo fatto era prevedibile, perchè sappiamo che ogni derivazione fa diminuire di una unità l'esponente di una potenza; ora x^4 essendo di quarto grado, la prima derivata sarà di grado 3, la seconda di grado 2, la terza di grado 1 e la quarta, che è 24, di grado zero. (Si sa che $x^0 = 1$). La derivata quarta è quindi una costante: la derivata quinta e le successive saranno tutte nulle.

Altro esempio: sia il polinomio

$$\begin{aligned} y &= x^3 - 4x^2 + 3x - 8 \\ y' &= 3x^2 - 8x + 3 \\ y'' &= 6x - 8 \\ y''' &= 6 \\ y^{IV} &= 0. \end{aligned}$$

Siccome il polinomio primitivo è di terzo grado, le derivate non eguali a zero sono 3, mentre la quarta e le successive sono nulle.

Deriviamo ora un polinomio di grado m:

$$\begin{aligned} y &= Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots + Px^2 + Qx + K \\ y' &= mAx^{m-1} + (m-1)Bx^{m-2} + (m-2)Cx^{m-3} \ldots \\ &\qquad + 2Px + Q \\ y'' &= m(m-1)Ax^{m-2} + (m-1)(m-2)Bx^{m-3} + \\ &\qquad + (m-2)(m-3)Cx^{m-4} \ldots + 2P. \end{aligned}$$

Si potrebbero anche scrivere tutte le derivate fino alla m^{sima} che sarebbe una costante. La derivata $(m+1)^{sima}$ sarebbe identicamente nulla.

CAPITOLO VIII

NEL QUALE SI PARLA DI QUALCHE ARTIFICIO DI CALCOLO

50. Artificio delle funzioni di funzioni. — Supponiamo che ci sia richiesto di derivare la funzione:

$$y = \sqrt[3]{a + bx^m};$$

potremmo dare a x un incremento $\frac{1}{N}$ e vedere di quanto cresce y. L'accrescimento di y moltiplicato per N ci darebbe, quando si fa crescere N indefinitamente, la derivata y'. Sarebbe troppo lungo.

L'artificio consiste nel porre:

$$a + bx^m = u.$$

La funzione assume la seguente espressione:

$$y = \sqrt[3]{u}.$$

Siccome è facile derivare:

$$u = a + bx^m$$

rispetto a x, ed è altrettanto facile derivare:

$$y = \sqrt[3]{u}$$

rispetto ad u, si è cercato di ricondurre una derivazione difficile a due derivazioni facili. La regola dice che bisogna moltiplicare le due derivate fra loro. Giustifichiamo questa regola ed avremo il diritto di servircene.

Spieghiamo anzitutto perchè l'artificio porta il nome che gli abbiamo dato.

Egli è che invece di considerare y come direttamente dipendente da x si preferisce considerare y come funzione di u che è funzione di x. Dunque y è una funzione di funzione di x. È importante di non scorgervi che un artificio di calcolo, ma questo artificio è d'importanza capitale e lo si impiega molto sovente.

51. Regola della derivazione di funzione di funzione. — Consideriamo la funzione:

$$y = f\,[u\,(x)].$$

Questa scrittura vuole indicare che y dipende da u, e questa a sua volta dipende da x. La lettera f è simbolo di funzione.

Indichiamo la variabile rispetto a cui si deriva una funzione con una piccola lettera in basso. Così:

y'_x indica derivata di y rispetto ad x; è quella che dobbiamo calcolare, ma indirettamente, perchè la valutazione diretta è difficile;

y'_u è la derivata di y rispetto a u e u'_x è quella di u rispetto ad x.

Le due ultime sono facili da calcolare. Ora dico che il loro prodotto darà la prima, cioè che:

$$y'_x = y'_u \times u'_x.$$

Ritorniamo alla nostra definizione di derivata: è l'accrescimento della funzione per unità di variabile.

Dire che la funzione x^2 ha per derivata $2x$ equivale a dire che x^2 cresce di $2x$ per unità di x o che essa cresce $2x$ volte più che x.

Così una funzione qualunque u crescerà u' volte più della sua variabile. Chiamo « sua variabile » la variabile da cui essa dipende direttamente, ben inteso.

Ciò posto, consideriamo la nostra funzione $y = f[u(x)]$ in cui y dipende da u che dipende da x.

La funzione y crescerà y'_u volte più di u, che crescerà u'_x volte più di x.

Dunque y crescerà $y'_u\, u'_x$ volte più di x, e perciò crescerà di $y'_u\, u'_x$ per unità di x.

Dunque la derivata di y rispetto ad x sarà: $y'_u\, u'_x$, e ciò si indicherà scrivendo:

$$y'_x = y'_u\, u'_x.$$

La notazione differenziale che impareremo più avanti fornisce un'altra dimostrazione. Impariamo ora la regola: *Se* y *è funzione di* x *pel tramite di* u, *la derivata di* y *rispetto ad* x *è eguale al prodotto della derivata di* y *rispetto ad* u *per la derivata di* u *rispetto ad* x.

Se si è in presenza di un numero qualunque di funzioni sovrapposte si prende la derivata di ciascuna rispetto alla variabile da cui dipende direttamente e si fa il prodotto delle derivate.

Così, sia:

$$y = f\ (uvtx)$$

nella quale ciascuna funzione dipenda direttamente dalla variabile che segue.

Diremo che y cresce y'_u volte più di u, che cresce u'_v volte più di v, che cresce v'_t volte più di t, che cresce t'_x volte più di x.

Finalmente y cresce $y'_u\ u'_v\ v'_t\ t'_x$ volte più di x; si ha:

$$y'_x = y'_u\ \ u'_v\ \ v'_t\ \ t'_x.$$

52. Applicazioni delle funzioni di funzioni. — *Sia da derivare:*

$$y = \sqrt{3\,a + 5\,x^2}.$$

Osserviamo che:

$$y = (3\,a + 5\,x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Poniamo:

$$u = 3a + 5x^2.$$

Allora:

$$y = u^{\frac{1}{2}}.$$

Deriviamo u rispetto ad x:

$$u'_x = 10x.$$

Deriviamo y rispetto ad u:

$$y'_u = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}.$$

In quest'ultima equazione sostituiamo u col suo valore $3a + 5x^2$; si ha:

$$y'_u = \frac{1}{2}(3a + 5x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3a + 5x^2}}.$$

Moltiplichiamo le due derivate ed avremo il risultato richiesto:

$$y'_x = 10x \frac{1}{2\sqrt{3a + 5x^2}} = \frac{5x}{\sqrt{3a + 5x^2}}$$

Sia da derivare:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2x^3 - a^2 3}}.$$

Poniamo:

$$u = 2x^3 - 3a^2.$$

Allora:

$$y = u^{-\frac{1}{2}}.$$

Formiamo le derivate:

$$y'_u = -\frac{1}{2} u^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} (2x^3 - 3a^2)^{-\frac{3}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{(2x^3 - 3a^2)^3}},$$

$$u'_x = 6x^2.$$

Facciamo il prodotto:

$$y'_x = -\frac{6x^2}{2\sqrt{(2x^3 - 3a^2)^3}} = -\frac{3x^2}{\sqrt{(2x^3 - 3a^2)^3}}.$$

Osservazione per un radicale quadratico. — Abbiamo visto che la derivata di $\sqrt{u}$ si ottiene scrivendo $\sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ da cui: $D.\sqrt{u} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} u'$. Ciò si può scrivere:

$$D.\sqrt{u} = \frac{1}{2\sqrt{u}} u'.$$

Questa formola è molto utile.

Esempio. — Per derivare $\sqrt{x^2 + 1}$ scrivo anzitutto $\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$ e moltiplico per la derivata di x^2+1 cioè $2x$:

$$D.\sqrt{x^2+1} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

A titolo di esercizio verificate che le derivate delle seguenti funzioni sono proprio quelle scritte vicino a ciascuna.

$$y = \sqrt{1-x^2} \qquad y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$y = \sqrt[3]{1+x^2} \qquad y' = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}.$$

$$y = \sqrt[n]{ax+b} \qquad y' = \frac{a}{n\sqrt[n]{(ax+b)^{n-1}}}.$$

53. Artificio delle funzioni inverse. — Ecco un altro artificio molto semplice e molto utile. Consideriamo una funzione:

$$y = 2x.$$

Questa si può porre sotto la forma:

$$x = \tfrac{1}{2}y.$$

Nel primo caso si considerava y come funzione di x, nel secondo si considera x come funzione di y (il che è evidentemente legittimo poichè se y dipende da x, x dipende a sua volta da y).

Si dice che la seconda funzione è l'inversa della prima.

Ora può avvenire che sia più facile derivare la funzione inversa che non la funzione medesima.

In questo caso si utilizza il seguente teorema.

Le derivate di due funzioni inverse hanno dei valori numerici inversi. — Anzitutto constatiamolo, poi lo dimostreremo.

Sia:

$$y = 2x;$$

la sua inversa è:

$$x = \tfrac{1}{2} y;$$

la derivata della prima è:

$$y' = 2,$$

la derivata della seconda è:

$$x' = \tfrac{1}{2}.$$

Ora, 2 è ben l'inverso di $\frac{1}{2}$.

Non sarebbe necessario dimostrarlo, tanto è semplice, ma dimostriamolo lo stesso.

Sia la funzione:

$$y = f(x).$$

Se chiamiamo y' la derivata di y rispetto ad x ed x' la derivata di x rispetto a y, si potranno enunciare due verità che non debbono contraddirsi.

D'un lato y cresce y' volte di più di x.

D'altro lato x cresce x' volte più di y.

Ciò non può aver luogo che quando y' e x' hanno valori inversi.

Dunque:

$$y' = \frac{1}{x'}.$$

Di conseguenza, quando lo si giudicherà opportuno, si potrà passare dalla funzione data alla sua inversa, e derivare quest'ultima; indi, per avere la derivata della funzione data, bisognerà fare l'inversa del risultato ottenuto. Questa è una feconda regola, e lo vedremo specialmente nello studio delle funzioni circolari.

In attesa di conoscere queste, applichiamo il procedimento ad un esempio semplice.

Sia da derivare:

$$y = \sqrt{\frac{3}{5}\,x}.$$

Procediamo dapprima senza artificio, secondo il metodo diretto, osservando che si tratta qui d'un radicale quadratico.

Troviamo:

$$y'_x = \frac{\frac{3}{5}}{2\sqrt{\frac{3}{5}\cdot x}}.$$

Ciò che si può scrivere:

$$y'_x = \frac{3}{10\sqrt{\frac{3}{5}\cdot x}}.$$

Proviamo ora ad usare la regola delle funzioni inverse, non perchè ciò sia qui necessario, ma per constatare che arriveremo allo stesso risultato.

Risolviamo rispetto a x l'equazione

$$y = \sqrt{\frac{3}{5}\,x}\,;$$

troviamo:

$$x = \frac{5}{3}\,y^2,$$

che è la funzione inversa della precedente; la sua derivata è:

$$x'_y = \frac{10}{3}\,y\,;$$

sostituendo y col suo valore che è:

$$\sqrt{\frac{3}{5}x}$$

si avrà:

$$x'_y = \frac{10\sqrt{\frac{3}{5}x}}{3}$$

Invertendo x'_y otterremo y'_x; quindi:

$$y'_x = \frac{3}{10\sqrt{\frac{3}{5}x}}.$$

È quanto abbiamo trovato col metodo diretto.

CAPITOLO IX

I PIÙ ATTRAENTI PROBLEMI SUI MASSIMI E MINIMI

54. Omaggio a Fermat. — Chi s'interessa di calcolo differenziale non dovrebbe ignorare il nome di Fermat, che applicò il calcolo delle derivate molto prima che fosse inventato. Ciò ha l'aria di una fantasia, ma è un fatto noto che ogni teoria sorge dalle sue applicazioni e fa corpo con esse. Così l'aerodinamica è nata dall'aeroplano e la termodinamica è uscita dalla macchina a vapore.

Analogamente il calcolo differenziale è uscito dal metodo di calcolo dei massimi e minimi, che rimane una delle sue più belle applicazioni.

Fatto sta che Fermat ha risolto il seguente problema: « Calcolare i valori d'una funzione per i quali la derivata della funzione s'annulla ». E nel suo metodo calcola realmente delle derivate, ma non se ne serve che per i valori zero.

I problemi ch'egli si poneva non domandavano altro.

Gli scritti di Fermat sono stati tradotti dal latino in francese[1] e la loro lettura non si può abbastanza raccomandare a chiunque ami le matematiche.

Ne trarremo il primo e più semplice dei problemi di questo capitolo. Conserveremo la notazione di Fermat, salvo in quanto concerne la variabile, che Fermat chiamava incognita e che indicava con a seguendo l'uso istituito da Viète di designare le incognite con delle vocali.

Noi la chiameremo x.

Conserveremo la lettera e per indicare l'accrescimento elementare di x, accrescimento che talvolta si designa con h, oppure con Δx, e che noi in questo libretto indicammo con $1/N$.

55. Problema del segmento. — Ecco anzitutto il testo di Fermat (salvo la lettera x).

Sia da dividere il segmento AC in E, in modo che $AE \times EC$ sia massimo (fig. 22).

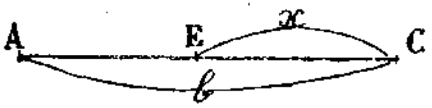


Fig. 22.

Poniamo:

$$AC = b;$$

(1) Da PAOLO TANNERY (Gauthier-Villars, Parigi).

sia x uno dei segmenti, l'altro sarà $b - x$ ed il prodotto di cui si deve trovare il massimo è $bx - x^2$.

Sia ora $x + e$ il primo segmento di b, il secondo sarà $b - x - e$ ed il prodotto dei segmenti:

$$bx - x^2 + be - 2ex - e^2.$$

Questo deve venire *adeguagliato* al precedente $bx - x^2$.

Sopprimendo i termini comuni:

$$be = 2\,xe + e^2;$$

dividiamo tutti i termini per e:

$$b = 2\,x + e,$$

sopprimiamo e:

$$b = 2\,x.$$

Per risolvere il problema bisogna dunque prendere la metà di b.

È impossibile, aggiunge Fermat, di trovare un metodo più generale.

Fermat adopera la parola « adeguagliato » per dire *eguagliato al limite*.

La soppressione di e è legittima poichè è $\left(\text{come } \frac{1}{N}\right)$ infinitamente piccolo.

Per scrivere che la derivata è nulla egli scrive che due valori vicini sono eguali; ma per notificare che vi tendono egli dice che si debbono « adeguagliare ».

Trattiamo ora il problema del segmento mediante le derivate.

I due segmenti sono x e $b - x$; il loro prodotto è $bx - x^2$. Sia y il valore variabile di questo prodotto.

Dobbiamo trovare il valore massimo della funzione:

$$y = bx - x^2.$$

Prendiamo la sua derivata:

$$y' = b - 2x;$$

quando la funzione è massima la sua derivata è nulla, dunque in corrispondenza del massimo si avrà:

$$b - 2x = 0$$

ossia

$$b = 2x \qquad \text{e} \qquad x = \frac{b}{2}.$$

Il prodotto considerato è quindi massimo quando il punto E è quello di mezzo del segmento AC.

56. Problema del carburatore. — In un carburatore si trova, in generale, un galleggiante cilindrico (figura 23), d'ottone stampato, che dev'essere leggero quanto è possibile per un volume dato.

Lo spessore dell'ottone essendo uniforme, il peso è proporzionale alla superfice; bisogna quindi diminuire la superfice più che si può. Il problema si pone così:

Di tutti i galleggianti cilindrici che hanno lo stesso volume quali sono le dimensioni di quello che avendo la superficie minima è per conseguenza il più leggero?

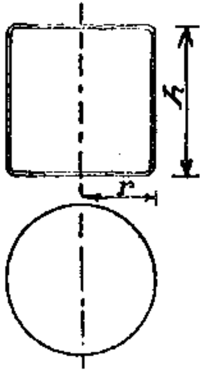


Fig. 23.

Sia r il raggio ed h l'altezza del galleggiante, V il suo volume; si sa che il volume d'un cilindro è

$$V = \pi r^2 h,$$

da cui si deduce:

$$h = \frac{V}{\pi r^2}. \qquad (1)$$

La superfice totale (due fondi ed il manto) è:

$$S = 2\,\pi r^2 + 2\,\pi r h.$$

Sostituiamo h col valore trovato più sopra (formola 1):

$$S = 2\,\pi r^2 + \frac{2\,\pi r V}{\pi r^2},$$

e semplificando:

$$S = 2\ \pi r^2 + 2\ V \frac{1}{r}.$$

La superfice S è una funzione del raggio r che deve venire resa minima.

La variabile da cui S dipende è r. Calcoliamo la derivata di S rispetto ad r, come noi faremmo se la variabile fosse indicata con x, e non con r. Otterremo:

$$S' = 4\ \pi r + 2\ V \frac{-1}{r^2},$$

ossia:

$$S' = 4\pi r - \frac{2\ V}{r^2}.$$

Quando la superfice S diventa minima, la sua derivata s'annulla, cioè si ha:

$$4\pi r - \frac{2\ V}{r^2} = 0.$$

Si deduce da questa eguaglianza che:

$$4\pi r = \frac{2\ V}{r^2},$$

e quindi:

$$4\pi r^3 = 2\ V,$$

e infine:

$$r^3 = \frac{2\,V}{4\,\pi} = \frac{V}{2\,\pi}.$$

Sostituiamo V con $\pi r^2 h$; avremo:

$$r^3 = \frac{\pi r^2 h}{2\,\pi} = \frac{r^2 h}{2},$$

da cui:

$$r = \frac{h}{2} \quad \text{e} \quad h = 2\,r.$$

L'altezza del cilindro dev'essere il doppio del raggio; l'altezza, cioè, eguaglia il diametro del cilindro.

Quindi, a parità di volume, un cilindro cavo avrà la massima leggerezza quando la sua altezza è eguale al suo diametro.

Vedete che il calcolo delle derivate può servire a qualche cosa. Osservate anche che il risultato ha, nella sua semplicità, una piacevole eleganza; i problemi sui massimi e minimi sono, in generale, dei problemi graziosi.

57. Problema della trave. — Quando si vuole squadrare un tronco d'albero in modo da dare alla trave ottenuta la resistenza massima possibile (alla flessione) ci si guarderà bene di farla quadrata, bensì la si farà sempre più alta che larga (fig. 24).

Si può calcolare quale è il rapporto che deve esistere fra l'altezza e la base affinchè la trave presenti la resistenza massima alla flessione.

Se la base è x e l'altezza h, si dimostra nella scienza delle costruzioni che la resistenza alla flessione è proporzionale a xh^2 e di conseguenza a $\frac{xh^2}{6}$. Quindi, supposto dato un tronco di diametro D, noi cercheremo il modo di squadrarlo onde sia massima l'espressione xh^2.

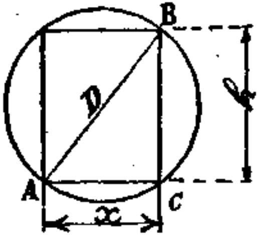


Fig. 24.

Osserviamo che il triangolo $A\ B\ C$ è rettangolo in C, e quindi, pel teorema di Pitagora, si ha:

$$h^2 = D^2 - x^2; \qquad (1)$$

introducendo questo valore in xh^2 otterremo:

$$xh^2 = x\,(D^2 - x^2) = xD^2 - x^3.$$

La quantità da rendere massima è quindi eguale a $xD^2 - x^3$; questa funzione si può chiamare y; scriviamo quindi

$$y = xD^2 - x^3.$$

Per rendere massimo y facciamone la derivata:

$$y' = D^2 - 3\,x^2,$$

ed eguagliamola a zero:

$$D^2 - 3x^2 = 0,$$

e quindi

$$D^2 = 3x^2. \qquad (2)$$

Dalla eguaglianza (1) si deduce anche:

$$D^2 = h^2 + x^2;$$

eguagliamo questi due valori di D^2 ed avremo:

$$h^2 + x^2 = 3x^2,$$

e quindi

$$h^2 = 2x^2,$$

da cui:

$$h = x\sqrt{2}.$$

L'altezza deve essere eguale al prodotto della base per $\sqrt{2}$ (che è circa 1,41).

All'ingrosso, l'altezza deve essere i $\frac{14}{10}$ della base, rapporto frequentemente adottato nei trattati sul taglio dei legnami.

58. Problema della casseruola. — In generale le casseruole di rame o d'alluminio che si trovano in commercio hanno una altezza eguale alla metà del loro diametro ed è per risparmiare metallo che i fabbricanti hanno adottato questo rapporto.

Il problema è analogo a quello del galleggiante, ma il risultato è diverso, perchè la casseruola è aperta in alto (fig. 25). Saremmo invece nello stesso caso se il fabbricante dovesse fornire un coperchio dello stesso metallo; egli avrebbe allora interesse a fare la casseruola più alta (è il caso della marmitta).

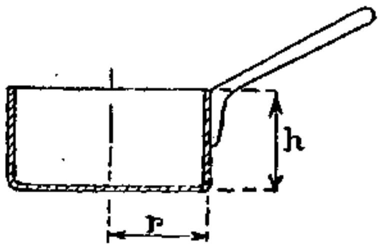


Fig. 25.

Sia r il raggio ed h l'altezza della casseruola. Il volume è $V = \pi r^2 h$, e quindi

$$h = \frac{V}{\pi r^2}; \tag{1}$$

la superfice è $S = \pi r^2 + 2\,\pi r h$ e sostituendo h col suo valore dato dalla (1) si ha:

$$S = \pi r^2 + \frac{2\pi r V}{\pi r^2} = \pi r^2 + 2\,V\,\frac{1}{r}.$$

La funzione da rendersi minima è dunque

$$S = \pi r^2 + 2\ V \frac{1}{r}.$$

La sua derivata è:

$$S' = 2\,\pi r + 2\ V \frac{-1}{r^2} = 2\,\pi r - \frac{2\ V}{r^2};$$

nelle condizioni di minimo questa derivata deve essere nulla, cioè:

$$2\pi r - \frac{2\ V}{r^2} = 0,$$

e quindi

$$2\,\pi r = \frac{2\ V}{r^2},$$

ossia

$$2\,\pi r^3 = 2\ V,$$

o ancora:

$$r^3 = \frac{V}{\pi}.$$

Riscriviamo l'eguaglianza (1):

$$h = \frac{V}{\pi r^2}.$$

Dividiamo membro a membro queste due eguaglianze; otteniamo

$$\frac{r^2}{h} = \frac{V}{\pi} \times \frac{\pi r^3}{V} = r^3,$$

da cui:

$$r^3 = hr^2$$

ed infine

$$r = h.$$

Si vede che l'altezza dev'essere eguale al raggio.

59. Problema del barcone. — Si tratta d'un barcone azionato da un motore, supponiamo, a benzina. Se il barcone va troppo in fretta il consumo di combustibile è oneroso, se va troppo lentamente il viaggio dura troppo e le spese orarie (personale e capitale investito) diventano notevoli.

Bisogna trovare la velocità più economica.

Fissiamo i dati del problema.

Un barcone a benzina consuma all'ora un numero di decilitri eguale al cubo della velocità realizzata (*in chilometri all'ora*).

La benzina costa 2 lire al litro. Le spese fisse (capitale e personale) *ammontano a 25 lire all'ora. Qual'è la velocità che ridurrà al minimo il costo d'un viaggio di* 100 *chilometri eseguito senza fermate?*

Sia v la velocità in chilometri all'ora. Il consumo orario in decilitri è v^3, ed in litri

$$\frac{v^3}{10}.$$

Se ogni litro di benzina costa 2 lire la spesa in benzina è di $\frac{2\,v^3}{10}$ lire all'ora.

Il viaggio durerà $\frac{100}{v}$ ore, da cui una spesa fissa di:

$$\frac{25 \times 100}{v} = \frac{2\,500}{v} \text{ lire}.$$

La spesa totale sarà:

$$\frac{2\,v^3}{10} \times \frac{100}{v} + \frac{2\,500}{v}.$$

Dobbiamo rendere minima questa spesa, ossia la funzione:

$$y = 20\,v^2 + \frac{2\,500}{v}.$$

Facciamone la derivata:

$$y' = 40\,v - \frac{2\,500}{v^2}.$$

Questa derivata dev'essere nulla, dev'essere quindi:

$$40\,v = \frac{2\,500}{v^2}$$

da cui risulta che:

$$40\,v^3 = 2\,500,$$

e quindi

$$v^3 = 62,5,$$

ed infine

$$v = \sqrt[3]{62,5} = \text{circa } 4.$$

La velocità dovrà essere di 4 chilometri all'ora ed il viaggio durerà 25 ore

60. Problema di Fermat del raggio luminoso rifratto. — Questo bellissimo problema è stato risolto da Fermat per spiegare la legge della rifrazione della luce, che Descartes aveva scoperto ma dimostrava per mezzo d'ipotesi errate.

Descartes supponeva infatti che la luce si propagasse più rapidamente nel vetro che nell'aria. Fermat partì dall' ipotesi opposta. Il curioso è ch'essi arrivarono allo stesso risultato.

La disputa fu a quell'epoca assai viva

« È possibile, scrive Fermat (nel suo metodo dei « massimi e minimi), di arrivare senza paralogismi « ad una stessa verità per due vie assolutamente « opposte? È questa è una questione che abbando« niamo ai geometri abbastanza acuti per risolverla « rigorosamente; poichè senza entrare in vane di« scussioni, il possesso sicuro della verità ci basta « e lo stimiamo preferibile ad una lunga sequela « di polemiche inutili ed illusorie ».

Ma torniamo al nostro problema ed osserviamo anzitutto che se la linea retta è il cammino più breve non è sempre il più rapido.

Immaginiamo un faro sulla riva del mare (fig. 26) e supponiamo che invece di illuminare l'orizzonte diriga il suo proiettore secondo *A B*. Il fascio di raggi sarà rifratto, come si sa, ed andrà ad illuminare il fondo del mare nel punto *C*.

Questa deviazione non è illusoria; dei palombari potrebbero constatarla.

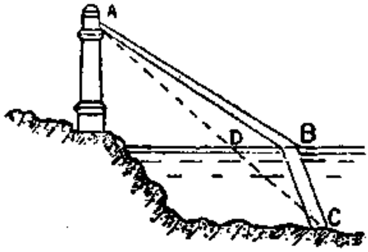


Fig. 26.

Ora, supponendo l'impossibile, immaginiamo che un raggio luminoso possa andare da *A* in *C* seguendo una linea retta; che cosa succederebbe? Il raggio avrebbe meno cammino da fare nell' aria ma di più nell' acqua. Ora nell' acqua la luce si propaga con minor velocità che nell' aria, di modo che in definitiva impiegherebbe più tempo, pur percorrendo la linea retta, che segna il più breve cammino fra *A* e *C*.

Il più rapido di tutti i percorsi che la luce può seguire per andare da *A* in *C* è precisamente quello che essa segue. La natura, diceva Fermat, segue le vie più facili.

Avremmo potuto anche immaginare due punti *A* e *B* (fig. 27) situati su due terreni opponenti delle difficoltà diverse alla marcia e separati dalla linea retta *P Q*. Se mi trovo nel punto *A* appartenente al terreno buono e se voglio andare al punto *B* situato nel terreno cattivo, può darsi che la retta *A B* non sia per me il cammino più rapido poichè posso trovare vantaggioso di seguire una strada un po' più lunga sul terreno buono, per farla poi più corta su quello cattivo.

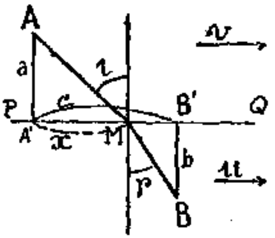


Fig. 27.

Vedremo infatti che se v è la velocità che posso realizzare sul terreno buono e u quella che realizzo sul terreno cattivo, e se, naturalmente, queste velocità sono diverse fra loro, avrò tutto l'interesse di percorrere una linea spezzata *A M B*. Gli angoli i ed r saranno allora ineguali ed i loro seni saranno precisamente nel rapporto di v ad u:

$$\frac{\text{sen}\, i}{\text{sen}\, r} = \frac{v}{u}.$$

È proprio la legge che presiede alla propagazione del raggio luminoso. La determineremo partendo dalla considerazione che il tempo impiegato dev'essere minimo.

Siano a e b le distanze di A e B dalla retta PQ cioè i segmenti AA' e BB'; sia c la distanza $A'B'$ ed x la distanza $A'M$. Il tempo necessario per percorrere AM sarà

$$\frac{AM}{v}, \text{ ossia } \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v};$$

il tempo necessario per percorrere BM sarà

$$\frac{BM}{u}, \text{ ossia } \frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{u};$$

il tempo totale per andare da A in B sarà quindi:

$$T = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v} + \frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{u}.$$

Questa è la funzione da rendere minima; il lettore sa che bisogna calcolarne la derivata; egli troverà senza fatica, dopo qualche trasformazione, che essa è eguale a:

$$\frac{2x}{2v\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{2(c-x)}{2u\sqrt{b^2+(c-x)^2}}.$$

Poichè questa derivata dev'essere nulla, il minuendo deve eguagliare il sottraendo. Potremo quindi scrivere, dopo evidenti semplificazioni:

$$\frac{x}{v\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{u\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}$$

ossia:

$$\frac{x}{vAM} = \frac{c - x}{uBM}.$$

Qui faremo una piccola osservazione che capirete senz'altro se vi ricordate appena appena della vostra trigonometria, altrimenti credetemi sulla parola.

Sulla figura si vede che:

$$x = A\,M \operatorname{sen} i \quad \text{e} \quad c - x = B\,M \operatorname{sen} r.$$

La nostra eguaglianza diventa:

$$\frac{A\,M \operatorname{sen} i}{vAM} = \frac{BM \operatorname{sen} r}{uBM},$$

e semplificando:

$$\frac{\operatorname{sen} i}{v} = \frac{\operatorname{sen} r}{u}$$

che può scriversi:

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{v}{u},$$

come abbiamo detto più sopra.

Questa è l'espressione matematica del famoso principio di Descartes che in certi paesi viene chiamato principio di Snellius ma che in realtà si dovrebbe chiamare invece principio di Fermat.

61. Problema delle api. — Ed ecco, per chiudere questo capitolo, il più grazioso problema che ci sia. Lo ha posto la natura. Il genio delle api lo ha risolto, non si sa come, ma con una precisione che fa pensare.

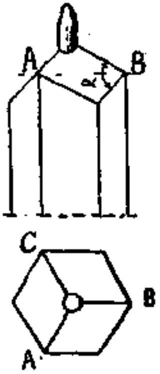


Fig. 28.

Se volete rappresentarvi esattamente una cellula d'apiario con la sua chiusura, prendete una matita e tagliatela secondo tre piani inclinati intersecantisi secondo tre linee rette incontranti tre degli spigoli della matita (fig. 28).

La matita rappresenta la cellula di cera formata da sei pareti eguali e la parte tagliata raffigura una specie di tetto costituito da tre rombi i cui piani sono egualmente inclinati sull'asse. Il problema che le api debbono risolvere è quello di adottare per questi rombi l'inclinazione che a parità di volume risparmi al massimo la cera.

Réaumur propose il problema al matematico Koenig, il quale trovò col calcolo che il piccolo angolo α di ciascun rombo doveva misurare 70 gradi e 34 minuti; più tardi Mac Laurin trovò 70 gradi

32 minuti e Cramer 70 gradi e 31 minuti. Le api hanno trovato 70 e 32 minuti dando ragione a Mac Laurin; è ciò infatti che Maraldi ha constatato misurando con tutta la precisione possibile l'angolo che le api hanno adottato.

Senza possedere il genio delle api nè la scienza di Mac Laurin, tentiamo un metodo semplificato per calcolare quest'angolo a meno di qualche minuto.

Maeterlinck nel suo bel libro « La vie des abeilles » qualifica questo problema di alta matematica. Ma esistono delle matematiche alte e basse? — Non lo crediamo; ci sono delle matematiche più o meno note, più o meno diffuse, più o meno assimilabili. Al tempo d'Archimede bisognava quasi essere eguali ad un Archimede per comprendere il calcolo di π che uno scolaro di scuole primarie oggi capisce senz'altro perchè la teoria s'è assodata e volgarizzata col tempo. Ma torniamo alle nostre api.

Osserviamo anzitutto sulla fig. 28, che rappresenta la matita, la possibilità di cambiare l'inclinazione dei tre piani del triedro senza che varii il volume, purchè si conservi ciascuna cerniera come *A B*. La fig. 29 mostra ciò supponendo la matita divisa in tre parti; la quantità di legno che leveremmo al di sotto di *A B* è eguale a quella che bisognerebbe aggiungere al di sopra. La dimostrazione geometrica è elementare.

Siccome il volume resta invariabile, non rimane che cercare quella condizione che rende minima la superfice quando varia la inclinazione e rimangono fissi i punti *A*, *B* e *C*.

Consideriamo ora la fig. 30, nella quale la cellula è rappresentata in proiezione.

Per semplificare prendiamo come unità il raggio del cerchio circoscritto all'esagono, che è eguale al lato dell'esagono. Allora è $r = 1$. Di conseguenza l'asse maggiore del rombo (cioè la cerniera) sarà

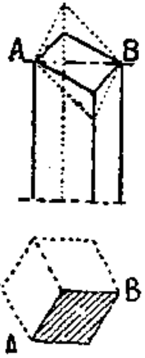


Fig. 29.

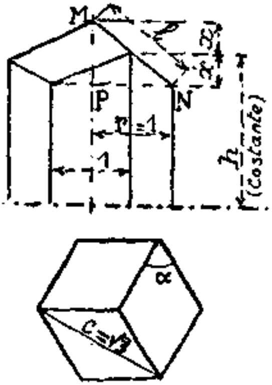


Fig. 30.

eguale a $\sqrt{3}$; chiamiamola c; si ha $c = \sqrt{3}$ (1). Chiamiamo l l'altro diagonale e x la sua semiproiezione ortogonale all'asse. Sia h l'altezza del prisma fino alla cerniera (h è costante, ed è contata a partire da un piano arbitrario perpendicolare all'asse del prisma).

Il triangolo MNP è rettangolo in P; quindi, in virtù del teorema di Pitagora,

$$l^2 = 4x^2 + 1,$$

da cui:

$$l = \sqrt{4x^2 + 1}. \tag{2}$$

La superfice laterale della cellula è formata da sei trapezi, ciascuno dei quali misura

$$\frac{h + (h - x)}{2} \times 1,$$

ossia

$$\frac{2h - x}{2};$$

la cellula è chiusa superiormente da tre rombi, ciascuno dei quali ha per superfice $\frac{lc}{2}$.

La superficie totale è

$$S = 6\,\frac{2h - x}{2} + 3\,\frac{lc}{2} = 3\,(2h - x) + \frac{3}{2}\,lc.$$

Sostituiamo ad l il suo valore trovato più sopra (equazione 2) e c con $\sqrt{3}$ (equazione 1); otterremo:

$$S = 3\,(2h - x) + \frac{3}{2}\cdot\sqrt{4x^2 + 1}\,\sqrt{3}$$

ossia

$$S = 6\,h - 3\,x + \frac{3}{2}\sqrt{4\,x^2 + 1}\,\sqrt{3}.$$

Ecco la funzione da rendere minima. Facciamone la derivata ed eguagliamola a zero (non dimenticando che 6 h è costante e quindi ha per derivata zero); otterremo:

$$-3 + \frac{3}{2}\,\frac{8\,x}{2\sqrt{4\,x^2 + 1}}\,\sqrt{3} = 0$$

da cui ricaviamo:

$$\sqrt{3}\,\frac{12\,x}{\sqrt{4\,x^2 + 1}} = 6.$$

Eleviamo tutto al quadrato:

$$3\,\frac{144\,x^2}{4\,x^2 + 1} = 36,$$

indi riduciamo a forma intera:

$$432\,x^2 = 144\,x^2 + 36,$$

da cui:

$$288\,x^2 = 36,$$

e finalmente:

$$x^2 = 0{,}125.$$

Introduciamo questo valore nell'equazione (2), che era:

$$l = \sqrt{4x^2 + 1};$$

questa equazione ci fornisce

$$l = \sqrt{4 \times 0,125 + 1} = \sqrt{1,50} = 1,224,$$

che è la lunghezza d'una diagonale del rombo; sappiamo che l'altra è lunga:

$$c = \sqrt{3} = 1,732.$$

Ora il rapporto delle due diagonali ci darà la tangente d'un semiangolo del rombo:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{l}{c} = \frac{1,224}{1,732} = 0,706.$$

Una tavola trigonometrica ci mostra che l'angolo avente per tangente 0,706 è un angolo di circa 35 gradi e 15 minuti.

Questo è il semiangolo $\frac{\alpha}{2}$; l'angolo è:

$$\alpha = 70 \text{ gradi e } 30 \text{ minuti.}$$

Abbiamo ottenuto il risultato di Mac Laurin a meno di 2 minuti. Avremmo dovuto forse prendere le nostre radici con 7 od 8 decimali, ma il nostro scopo non era di rettificare dei calcoli più precisi dei nostri; ci accontenteremo invece di questo risultato approssimato.

Vedete che senza affaticarvi troppo questo modesto libretto vi ha già ferrati per affrontare dei problemi d'una certa portata.

CAPITOLO X

METODI SEMPLICI
PER LE FUNZIONI CIRCOLARI

62. Richiamo di nozioni elementari. — Abbiamo l'ambizione di derivare le funzioni circolari senza utilizzare le formole trigonometriche d'addizione.

Richiamiamo tuttavia qualche definizione forse dimenticata. Osservate la fig. 31.

L'angolo x è determinato quando si conosce l'arco $N\,A$ da esso sotteso *sulla circonferenza di raggio eguale all'unità,* avente il centro nel vertice dell'angolo stesso. Anzi, invece di misurare l'angolo in gradi, si preferisce di misurarlo mediante l'arco $N\,A$ che l'angolo stesso comprende *in un cerchio di raggio eguale all'unità.*

La comprensione della trigonometria si basa su questa nozione di cerchio avente il raggio eguale all'unità.

Chiamiamo questo cerchio « cerchio trigonometrico ».

La lunghezza d'un cerchio ordinario è $2\pi r$.

Il cerchio trigonometrico avente per raggio la unità ha per lunghezza:

$$2\pi \times 1 = 2\pi = 6{,}287 \text{ circa.}$$

Questo numero misura 4 angoli retti; 2 angoli

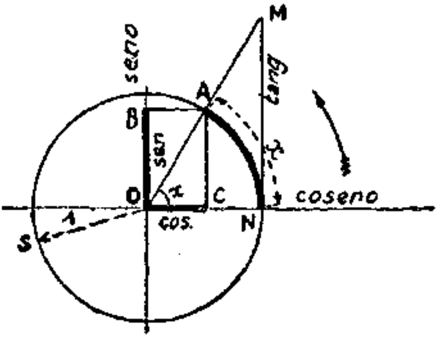


Fig. 31.

retti valgono la metà, ossia $\frac{2\pi}{2}$, cioè π. L'angolo retto vale $\frac{\pi}{2}$.

Gli archi si contano partendo dal punto N e ruotando nel senso positivo indicato dalla freccia (inversamente al moto delle lancette d'un orologio).

Le funzioni trigonometriche dell'angolo x o dell'arco x sono indicate nella figura.

La misura algebrica di OB oppure CA, ordinata del punto A, è il seno dell'angolo o dell'arco, cioè sen x.

La misura algebrica di OC oppure BA, ascissa del punto A, è il coseno dell'angolo o dell'arco, cioè cos x.

Infine NM è la tangente, cioè tg x.

63. Funzioni circolari. — Si capisce che se cambio la posizione del punto A, cambia tutta la figura.

Nel caso della fig. 31 se faccio aumentare l'arco, aumenteranno il seno e la tangente, mentre il coseno diminuirà.

Queste grandezze: sen x, cos x, tg x (ce ne sono altre che troverete nei trattati se le avete dimenticate), queste grandezze che dipendono dall'arco x e variano con esso, sono delle funzioni dell'arco x.

Essendo funzioni d'un arco di cerchio si chiamano *funzioni circolari*.

Divertitevi a tracciarne il diagramma, ciò che è molto istruttivo.

Porterete sull'asse delle ascisse (fig. 32) una lunghezza eguale a quella del cerchio trigonometrico, cioè 6,28.

Dividerete il cerchio in 16 parti ed in ciascun punto segnerete i seni (positivi o negativi). Indi dividerete il segmento dianzi segnato sull'asse delle ascisse in 16 parti e porterete in questi punti delle ordinate rappresentanti i seni; la curva ottenuta congiungendo le loro estremità è quella della funzione:

$$y = \text{sen}\, x.$$

Le ascisse rappresentano la variabile, che è l'arco x, e le ordinate la funzione, che è il seno dell'arco: sen x.

Cerchiamo in modo semplice la derivata di questa funzione.

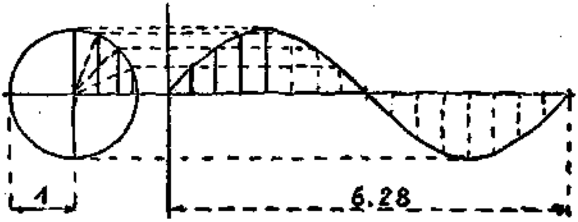


Fig. 32.

64. Derivata di sen x. — Tentiamo di far a meno delle formole trigonometriche di somma o differenza. Se preferite servirvene, troverete queste dimostrazioni dappertutto. Per conto nostro vogliamo restare «elementari» fino all'ultimo.

Nella fig. 33 mostriamo che l'arco x cresce d'una piccola quantità $\frac{1}{N}$, che è assimilabile alla diagonale d'un rettangolo di cui l'accrescimento del seno è uno dei lati. Quando $\frac{1}{N}$ tende a zero questa diagonale prolungata diventa la tangente al cerchio.

Ora sia, nella fig. 34, il punto A, l'estremità di un arco x.

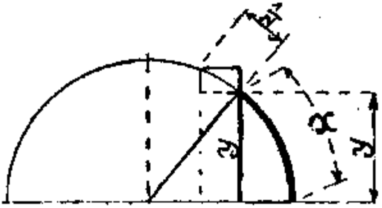


Fig. 33.

Diamo a x un incremento piccolissimo $\frac{1}{N}$, e per

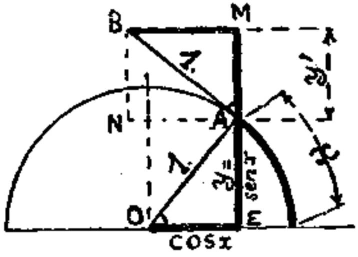


Fig. 34.

renderlo visibile moltiplichiamone la lunghezza per N. L'incremento diventa $\frac{1}{N} \times N = 1$. Portiamo $AB = 1$.

Siccome la tangente è la posizione esatta della diagonale del rettangolo elementare possiamo raffigurarci in $ANBM$ questo rettangolo elementare, ingrandito linearmente N volte.

Per quanto grande diventi N si avrà sempre:

$$\frac{1}{N} \times N = 1.$$

Nella posizione limite, i segmenti AB e AM rappresentano gli incrementi dell'arco x e della funzione sen x ingranditi nella stessa scala; quindi sen x cresce elementarmente di AM per unità d'arco e ***AM misura la sua derivata in vera grandezza.*** Ma per l'eguaglianza dei triangoli OEA e AMB si ha: $AM = OE$ e si vede che AM è precisamente eguale a cos x. *Dunque la derivata di sen* x *è cos* x.

65. Derivata di cos x. — Il ragionamento è il medesimo, ma la funzione è ora rappresentata da OE.

Quando x aumenta, cos x diminuisce; si può dire che cos x aumenta negativamente e che la derivata è in vera grandezza eguale a $-AN$, cioè, secondo la figura, a $-$ sen x.

Dunque la derivata di cos x *è — sen* x.

66. Derivata di tg x. — Sia da determinare la derivata di $y = \text{tg}\, x$.

La prima figura di questo capitolo vi permette di vedere, se l'avete dimenticato, che la tangente di x è eguale al quoziente $\dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$:

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}.$$

Dobbiamo determinare la derivata d'un quoziente; sappiamo come fare.

Poniamo:

$$\text{sen } x = u \quad \text{e} \quad \cos x = v.$$

Allora:

$$y = \frac{u}{v},$$

e quindi, in virtù della regola del numero 32,

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

Nel caso attuale:

$$y' = \frac{\cos x \cos x - \text{sen } x\,(-\,\text{sen } x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x}.$$

Il numeratore è la somma dei quadrati dei cateti d'un triangolo rettangolo la cui ipotenusa è il raggio eguale a 1; si ha dunque, pel teorema di Pitagora, che $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$, e quindi

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

La derivata della tangente è eguale all'inversa del quadrato del coseno.

67. L'inversa della funzione seno: $y = \text{arc sen}\, x$. — Questa è una delle funzioni circolari inverse. Invece di considerare il seno come una funzione dell'arco, si considera (fig. 35) l'arco y come funzione del suo seno eguale a x.

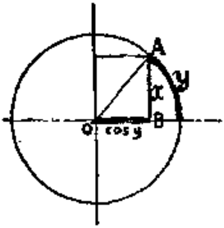


Fig. 35.

Si ha la funzione $y = \text{arc sen}\, x$ (cioè l'arco che ha x per seno).

Si potrebbe operare direttamente come per la funzione seno, ma per fortuna abbiamo imparato, nel numero 53, l'artificio delle funzioni inverse. È il momento di servirsene.

Siccome y è l'arco che ha per seno x, si ha che x è il seno dell'arco y, cioè $x = \text{sen}\, y$.

Deriviamo questa funzione considerando y come variabile. Siccome la derivata del seno è eguale al coseno, il risultato è $\cos y$.

Ma noi abbiamo invertita la funzione, per cui bisogna ora invertire la derivata; ora l'inversa di $\cos y$ è $\frac{1}{\cos y}$, quindi $y' = \frac{1}{\cos y}$. Ma il triangolo OBA (fig. 35) nel quale $OA = 1$, $OB = \cos y$ e $BA = x$, ci dà:

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2};$$

quindi

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}:$$

ecco il risultato.

Analogamente si troverebbe che la derivata di:

$$y = \text{arc} \cos x$$

è:

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

e che la derivata della funzione :

$$y = \text{arc tg}\, x$$

è:

$$y' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Le derivate delle altre funzioni circolari dirette o inverse si troverebbero altrettanto facilmente, ma hanno per noi meno interesse.

CAPITOLO XI

IL CAPPONE LOGARITMICO ED IL NUMERO e.

68. L'incremento legato alla grandezza. — Abbiamo finora incontrate delle grandezze il cui incremento dipendeva da un'altra grandezza. Per es. un arbusto crescente col passar del tempo. Ma vi sono numerosi casi nei quali l'incremento dipende dalla grandezza medesima.

Così l'incremento d'una palla di neve che rotola dipende dalla sua grossezza. L'incremento d'una popolazione dipende dall'importanza di questa popolazione.

Il peso di un animale che mangia e cresce in proporzione di questo stesso peso è ancora un esempio di grandezza che influisce sul proprio incremento.

Anche in aritmetica s'incontrano delle grandezze che influiscono sul loro incremento. Conoscete il problema della scacchiera? Si colloca un chicco di frumento sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così di seguito raddoppiando ogni volta. Quando il mucchio è piccolo, aumenta poco, quando è medio aumenta moderatamente; alla fine il mucchio sarebbe formidabile ed il suo incremento lo stesso.

Esistono quindi delle funzioni il cui incremento dipende dalla loro stessa grandezza.

Tale è per esempio la funzione $y = a^x$, che appartiene alle *esponenziali*, perchè l'incognita vi appare come esponente.

La più curiosa di tutte le funzioni esponenziali è la $y = e^x$, ove il numero e è eguale a 2,718 circa.

Verrete forse un giorno a sapere che la funzione e^x è eguale a:

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \ldots \text{ecc.}$$

Prolungate questa espressione fino a Baggio e sarete ancora all'inizio, poichè è una faccenda senza fine.

Studieremo dunque la funzione $y = e^x$, e per far questo ricorreremo al cappone logaritmico.

69. Il cappone logaritmico o la grandezza eguale alla sua derivata. — Immaginiamo un cappone il quale, per una ragione qualsiasi, ingrassi tanto più in fretta quanto più è grosso.

Supponiamo, per fissare le idee, ch'esso pesi un chilogrammo al principio dell'esperienza e che cresca in modo tale che il suo ingrassamento, in chilogrammi all'anno, sia, in ciascun istante, eguale al suo peso.

Così, quando pesa 1 chilogrammo, esso cresce in ragione di 1 chilogrammo all'anno. Quando pesa 1,235 chilogrammi, cresce in ragione di 1,235 chilogrammi all'anno, ecc.

Cerchiamo anzitutto il suo peso alla fine di un anno.

Ammettiamo provvisoriamente, benchè non sia rigoroso, che l'ingrassamento resti il medesimo durante il tempo di una giornata.

Osserviamo che siccome in ciascun istante il guadagno annuale è eguale al peso attuale, il guadagno giornaliero sarà la trecentosessantacinquesima parte del peso attuale.

Ora, affinchè un valore aumenti del suo trecentosessantacinquesimo, bisogna moltiplicarlo per $(1 + 1/365)$. È quanto faremo giorno per giorno.

Il peso iniziale è .... 1 kg.

Questo diventa dopo 1 giorno $1 + \frac{1}{365}$

Dopo due giorni.......... $\left(1 + \frac{1}{365}\right)^2$

Dopo tre giorni .... $\left(1 + \frac{1}{365}\right)^3$

E dopo 365 giorni .... $\left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365}$

Si troverebbe all'incirca 2,7 kg.

Ma il nostro calcolo non è esatto, perchè abbiamo ammesso che l'accrescimento in peso non vari durante un giorno.

Se avessimo calcolato, non giorno per giorno, bensì ora per ora, sarebbe stato più esatto, poichè la variazione in un'ora è molto minore di quella durante un giorno.

Invece di dividere l'anno in 365 giorni od anche in 8760 ore, dividiamolo in un numero N, molto grande, di parti eguali.

La nostra formola, che era:

$$\left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365}$$

diventa allora:

$$\left(1 + \frac{1}{N}\right)^{N}.$$

Quando N cresce indefinitamente, il valore di questa espressione s'avvicina a 2,718281 ... che si indica con e, il famoso numero e. Così il peso del nostro cappone alla fine di un anno sarà espresso dal numero e, cioè sarà di 2,718 chilogrammi circa.

70. Funzione eguale alla sua derivata. — È pacifico che il paragone del cappone ha servito qui unicamente per concretizzare l'idea di un peso variabile.

In realtà, ciò che abbiamo scoperto è che una grandezza y primitivamente eguale ad 1 e costretta a restare eguale alla sua derivata, mentre la variabile (tempo) aumenta di una intera unità, diventa eguale a 2,718, cioè ad e.

Abbandoniamo ora l'idea del cappone, ma continuiamo l'esperienza con un peso variabile sempre eguale alla sua derivata.

Al principio della nostra esperienza, il peso era di 1 kg; in un anno (cioè nell'unità di tempo) è stato moltiplicato per e.

Nel secondo anno, ciascuna unità di questo peso e aumenterà da 1 ad e e sarà quindi moltiplicata per e.

Il peso diventerà:			$e \times e = e^2$;
parimenti alla fine di 3 anni il peso sarà:		—	e^3;
alla fine di 4 anni	—	—	e^4;
ed alla fine di x anni	—	—	e^x.

Quindi, se chiamiamo y il peso variabile ed x il tempo in anni, potremo scrivere $y = e^x$.

È precisamente la temibile funzione esponenziale di cui volevamo studiare la derivata.

In fede mia, è quasi fatto, poichè siamo arrivati a questa funzione, proprio partendo dalla condizione che la derivata fosse eguale alla grandezza, cioè che la derivata fosse eguale alla funzione. Dunque potremo già dire che la derivata della funzione:

$$y = e^x$$

è uguale alla funzione stessa, cioè:

$$y' = e^x.$$

Tenteremo tuttavia di dimostrarlo direttamente.

71. Derivazione diretta di $y = e^x$. — Non dico che il metodo dello sviluppo in serie non abbia la sua bellezza ed eleganza. Avrete senza dubbio occasione di studiarlo nelle opere che leggerete dopo questa. Tuttavia la dimostrazione che fornirò può per il momento bastarvi, e mi sembra ch'essa mostri meglio alla mente come dalla definizione stessa del numero e discenda che la funzione e^x ha per derivata se stessa.

Si sa che e è eguale al valore limite di $\left(1 + \frac{1}{N}\right)^N$, quando N cresce indefinitamente.

Cerchiamo la derivata di $y = e^x$.

Bisogna dare ad x un incremento molto piccolo, precisamente $\frac{1}{N}$ secondo il nostro metodo abituale. Se x cresce di $\frac{1}{N}$, la funzione e^x diventa:

$$e^{x + \frac{1}{N}},$$

ossia:

$$e^x e^{\frac{1}{N}}, \tag{1}$$

ma il secondo fattore può scriversi altrimenti, poichè, se N è molto grande, possiamo ritenere che sia, approssimativamente, $e = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N$, e quindi

$$e^{\frac{1}{N}} = \left\{\left(1 + \frac{1}{N}\right)^N\right\}^{\frac{1}{N}} = 1 + \frac{1}{N};$$

all'espressione (1) si può quindi dare la forma seguente:

$$e^x\left(1 + \frac{1}{N}\right) \text{ ossia } e^x + \frac{e^x}{N}.$$

Si vede che la funzione e^x è aumentata di $\frac{e^x}{N}$ per un incremento $\frac{1}{N}$ della variabile.

Il suo incremento per unità di variabile sarà N volte maggiore:

$$\frac{e^x}{N} \times N = e^x.$$

Dunque la derivata di e^x è e^x.

72. Caso particolare. — Occorre sovente derivare delle funzioni come e^{2x}, cioè del tipo e^{ax}, nelle quali l'esponente è il prodotto di x per una costante. Basta applicare la regola di derivazione della funzione di funzione.

Sia da derivare $y = e^{ax}$.

Si tratta l'esponente ax come si sarebbe trattato x se fosse stato solo, e si moltiplica la derivata così ottenuta, che è e^{ax}, per la derivata dell'esponente rispetto ad x; nel nostro caso questa derivata è a, quindi:

$$D.e^{ax} = ae^{ax}.$$

Queste funzioni esponenziali non sono più funzioni eguali alla loro derivata, ma ad essa proporzionali.

La loro importanza è grande nello studio delle grandezze legate al loro incremento o al loro decremento in una maniera qualsiasi, cioè nei fenomeni come: aumento o diminuzione di pressione barometrica secondo l'altezza, dispersione delle radiazioni luminose (assorbimento), dispersione del calore, scarica d'un condensatore, ecc.; in chimica: velocità d'una reazione, ecc. ecc.

La variabile x ha sovente il significato di tempo. Le funzioni hanno spesso la forma $y = ke^{at}$.

Quando si tratta d'una grandezza decrescente l'esponente è negativo; ad esempio la legge del raffreddamento (di Newton) si scrive:

$$T_t = T_0\, e^{-at};$$

T_t è l'eccesso di temperatura del corpo che si raffredda rispetto al mezzo ambiente dopo un tempo t, mentre T_0 è lo stesso valore al principio dell'esperienza. La costante a dipende dalle proprietà del corpo considerato.

73. Logaritmi. — Richiamiamo alcune nozioni, forse dimenticate, sui logaritmi. Anzitutto una definizione:

Il logaritmo del numero N *rispetto ad una certa base è la potenza alla quale bisogna elevare a base per trovare* N.

Per i logaritmi volgari o decimali, che si usano nelle applicazioni, la base è 10.

Quindi il logaritmo decimale di 100 è 2, perchè:

$$10^2 = 100;$$

il logaritmo decimale di 1000 è 3, perchè:

$$10^3 = 1\,000;$$

il logaritmo decimale di 1 è 0 perchè (in virtù di quanto ricordammo chiudendo il Capitolo IV)

$$10^0 = 1$$

Parimenti il logaritmo decimale di 50 è circa 1,698 perchè bisogna elevare 10 alla potenza 1,698 per ottenere 50; infatti:

$$10^{1,698} = 50.$$

I logaritmi decimali o volgari si indicano con:

log. Quindi si scriverà:

$$\log 50 = 1{,}698.$$

Esiste un'altra categoria di logaritmi che si chiamano neperiani, naturali o iperbolici e che hanno per base il famoso numero e di cui abbiamo parlato:

$$e = 2{,}718\ldots.$$

li indicheremo con ln.

Il logaritmo neperiano d'un numero A è la potenza alla quale bisogna elevare e per ottenere A.

Così se si ha:

$$e^x = A,$$

x sarà il logaritmo neperiano di A e si scriverà:

$$x = \ln A.$$

Siccome i logaritmi dei diversi sistemi sono fra lòro proporzionali, si passa dall'uno all'altro per semplice moltiplicazione.

Per trasformare un logaritmo neperiano (ln) in logaritmo decimale (log) basta moltiplicarlo per 0,4343.

Per l'operazione inversa bisognerebbe dividere per 0,4343 o meglio ancora moltiplicare per 2,3026, che è l'inverso di 0,4343.

Così:

$$\log N = 0{,}4343 \ln N,$$

e

$$\ln N = 2{,}3026 \log N.$$

Queste due formole ci permetteranno di passare da un sistema di logaritmi all'altro.

74. Derivata di $y = \ln x$. — La funzione proposta è detta logaritmica, perchè vi appare il logaritmo neperiano della variabile.

Se y è eguale al ln di x, ciò vuol dire che la base e elevata alla potenza y darà x, cioè che:

$$x = e^y. \tag{1}$$

Questa funzione è l'inversa della precedente. Deriviamola: la derivata di e^y è e^y, in base ai risultati del numero 70; ma derivando x rispetto ad y facciamo la derivata della funzione inversa di y; dobbiamo quindi invertire il risultato, ed otteniamo:

$$y' = \frac{1}{e^y}.$$

Ma in virtù dell'eguaglianza (1) è $e^y = x$, sicchè

$$y' = \frac{1}{x},$$

ossia:

$$D \,.\, \ln x = \frac{1}{x}.$$

75. La funzione esponenziale $y = a^x$. — Prendiamo i logaritmi naturali dei due membri:

$$\ln y = x \ln a.$$

Risolviamo rispetto ad x ed avremo la funzione inversa:

$$x = \frac{1}{\ln a} \ln y;$$

calcoliamo x'.

Secondo il numero precedente la derivata di $\ln y$, rispetto ad y, è $\frac{1}{y}$, quindi:

$$x' = \frac{1}{y \ln a}.$$

Per avere y' faremo l'inverso del risultato ottenuto; scriveremo cioè (v. n. 53):

$$y' = \frac{1}{x'},$$

e quindi:

$$y' = y \ln a.$$

Siccome $y = a^x$, si ha in definitiva:

$$y' = a^x \ln a.$$

76. Derivata di $y = \log x$. — È ancora una funzione logaritmica, ma il logaritmo è decimale. Sappiamo esprimerla mediante logaritmi neperiani (se ricordiamo che il logaritmo decimale di un numero si ottiene moltiplicando il corrispondente logaritmo neperiano per 0,4343); quindi:

$$y = 0{,}4343 \ln x.$$

La derivata di $\ln x$ è $\dfrac{1}{x}$. (N. 74).

Dunque quella di $0{,}4343 \ln x$ sarà:

$$y' = \frac{0{,}4343}{x}.$$

CAPITOLO XII

LA NOTAZIONE DIFFERENZIALE

77. Notazione di Leibniz. — Quando abbiamo imparato a calcolare le derivate abbiamo utilizzato un procedimento che ora rammenteremo.

Sia la funzione $y = 3x$. Facevamo crescere x d'una quantità $\frac{1}{N}$. Siccome x diventava $x + \frac{1}{N}$, la funzione y assumeva il valore $3x + \frac{3}{N}$. L'incremento di y essendo $\frac{3}{N}$, la derivata era:

$$\frac{3}{N} \times N = 3.$$

Dicemmo che il numero N cresceva indefinitamente, per cui $\frac{1}{N}$ tendeva a zero.

Secondo la notazione di Leibniz invece di indicare con $\frac{1}{N}$ l'incremento di x, lo si indica con dx, che leggesi *di x* e chiamasi *differenziale di x*.

Il differenziale di x si comporta come $\frac{1}{N}$, quando N aumenta indefinitamente; cioè *dx tende a zero*.

Si potrebbe scrivere:

$$dx = \frac{1}{N}.$$

Diciamo, se volete, che dx rappresenta un elemento di x, un incremento piccolissimo di x.

Così invece di dire che x diventa $x + \frac{1}{N}$ avremmo potuto dire che diventava $x + dx$; dx è quindi un simbolo che indica un incremento tendente a zero, non una quantità finita. Tuttavia questo simbolo vicino ad un altro acquista un significato preciso.

Seguendo la medesima notazione di Leibniz chiamiamo dy il differenziale di y.

Non abbiamo bisogno di grandi precauzioni per definire dy, poichè dx ci aiuterà.

Quando x aumenta di dx, la quantità di cui aumenta y si chiamerà dy.

Si dice che gli elementi dx e dy si corrispondono. Ciò ci permetterà di passare facilmente dalla notazione da noi impiegata a quella differenziale.

78. Rapporti differenziali o derivate. — Sappiamo che la derivata y' è l'accrescimento di y per unità di variabile. Cioè l'incremento elementare di y sta a quello di x come y' sta ad uno.

Ciò si può scrivere:

$$\frac{\text{incremento elementare di } y}{\text{incremento elementare di } x} = \frac{y}{1}$$

e scrivendo questa relazione con la notazione differenziale:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{1}$$

oppure:

$$\frac{dy}{dx} = y'.$$

Si vede che la derivata y è eguale al rapporto dei due differenziali, rapporto che si chiama anche coefficiente o quoziente differenziale.

Mostriamolo graficamente, benchè dy e dx siano troppo piccoli per essere raffigurati; è una licenza che ci si permette.

Sia da misurarsi la pendenza d'una retta AB (fig. 36). Portiamo $AC = 1$ e figuriamoci una orizzontale dx passante per A.

La verticale corrispondente sarà: dy.

Ci sono due mezzi per misurare la pendenza ed i loro risultati debbono essere equivalenti.

Si può valutare $CB = y'$. Il valore y' rappresenta ad un tempo la pendenza di AB e la derivata della sua ordinata y.

Ma si può anche calcolare il rapporto:

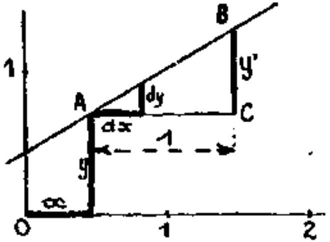


Fig. 36.

$$\frac{dy}{dx},$$

quindi:

$$\frac{dy}{dx} = y'.$$

Del resto la similitudine dei triangoli ci dà anche:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{1}$$

ossia:

$$\frac{dy}{dx} = y'.$$

Quindi il quoziente differenziale $\frac{dy}{dx}$ rappresenta esso pure la pendenza e la derivata. Scrivere y' o scrivere $\frac{dy}{dx}$ è la stessa cosa. Il denominatore indica sempre la variabile rispetto alla quale si deriva.

Così, nella notazione di Lagrange, la derivata di y

rispetto a x si scriveva y'_x. La si scriverà pure:

$$\frac{dy}{dx}.$$

Analogamente la derivata di y rispetto ad u si scriverà sia y'_u, sia:

$$\frac{dy}{du}.$$

Si avrebbe pure:

$$y'_t = \frac{dy}{dt} \quad \text{e} \quad z'_u = \frac{dz}{du}$$

come derivate di y rispetto a t e di z rispetto ad u.

Un grande vantaggio della notazione differenziale è di indicare rispetto a qual variabile si fa la derivata.

Ora se, in questa notazione, riprendiamo la funzione $y = 3x$ e facciamo crescere x d'una quantità dx tendente a zero, ne segue per y un aumento corrispondente dy. Avremo allora:

$$y + dy = 3\ (x + dx),$$

ossia:

$$y + dy = 3\,x + 3\,dx;$$

ma:

$$y = 3\,x,$$

e sottraendo questa dalla precedente:

$$dy = 3\,dx.$$

Dividendo per dx abbiamo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\,dx}{dx} = 3\,;$$

ma $\dfrac{dy}{dx}$ è la derivata di y rispetto a x, dunque questa derivata è 3:

$$D.3\,x = 3,$$

come già sappiamo.

Questo metodo che ci sembra meno elementare del nostro è usato classicamente, salvo che si ricorre sovente ad una notazione un po' differente che per noi non ha interesse.

79. Scrittura delle derivate successive. — Abbiamo visto che la notazione della derivata prima di y rispetto a x, che scrivemmo finora y' o più chiaramente y'_x, è diventata $\dfrac{dy}{dx}$. Con questo stesso modo di scrivere la derivata seconda, che era indicata con y'', si scriverà $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, e la derivata terza y''' si scriverà $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, e così via.

Se dunque partiamo dalla funzione x^4 e se calcoliamo le sue derivate successive, possiamo scrivere successivamente:

$$y = x^4,$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 4x^3,$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2,$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = 24x,$$

$$y^{\mathrm{IV}} = \frac{d^4y}{dx^4} = 24,$$

$$y^{\mathrm{V}} = \frac{d^5y}{dx^5} = 0.$$

Si vede che questa lettura è molto facile. Ora sapete scrivere le derivate in forma di rapporto differenziale ma, anche sotto questa forma, rimangono derivate e conservano questo nome.

Quando si parla del differenziale di una funzione y s'intende non $\frac{dy}{dx}$, ma dy solo. Bisogna dunque potere dare il valore di dy isolatamente.

Vedremo che non occorre calcolo alcuno; basta scrivere il risultato della derivazione in un'altra forma.

80. Passaggio dalla derivata al differenziale. — Prendiamo come poco fa le mosse dalla funzione $y = x^4$. Ci domandiamo il valore del differenziale dy di questa funzione.

Ora, conosciamo la sua derivata:

$$\frac{dy}{dx} = 4\,x^3;$$

per trovare dy basta moltiplicare per dx i due membri; si ha:

$$dy = 4\,x^3\,dx,$$

che è il differenziale.

Siccome la derivata è $4x^3$, il differenziale sarà $4x^3\,dx$, cioè la derivata moltiplicata per dx.

Se fossimo partiti da $y = x^2$, la cui derivata è

$$\frac{dy}{dx} = 2\,x,$$

avremmo ottenuto:

$$dy = 2\,x\,dx.$$

Il differenziale è la derivata moltiplicata per dx.

Più in generale: se una funzione y ha per derivata y', che si scrive anche $\frac{dy}{dx}$, si ha:

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

e per conseguenza:

$$dy = y'\,dx.$$

Il differenziale dy di una funzione y è eguale al prodotto della derivata y' per dx (che è il differenziale della variabile x).

Se la variabile fosse z è chiaro che bisognerebbe moltiplicare per dz.

Così se è:

$$y = z^2,$$

si ha:

$$\frac{dy}{dz} = 2z,$$

e:

$$dy = 2z\,dz.$$

Si moltiplica sempre la derivata della funzione per il differenziale della variabile, cioè, solitamente, per dx.

81. Grandezze trascurabili. — Non abbiamo intenzione di occuparci della metafisica dell'infinitamente piccolo.

Leibniz fu il primo a mettere un po' d'ordine in questi principi sottili sui quali ci si dilunga forse un po' troppo nelle esposizioni elementari.

Ne diremo tuttavia qualche cosa.

Due grandezze infinitamente piccole sono *dello stesso ordine* quando non si può trascurarne una rispetto all'altra.

(Si dovrebbe dire che *il loro rapporto tende ad un numero finito e non eguale allo zero*).

Consideriamo a e $\frac{a}{N}$; quando N aumenta indefinitamente è chiaro che $\frac{a}{N}$ tende allo zero e ciò si esprime anche dicendo che $\frac{a}{N}$ è un *infinitesimo*; per valori abbastanza grandi di N, lo si può trascurare rispetto ad a e noi diremo che $\frac{a}{N}$ è infinitesimo di primo ordine. Per la stessa ragione $\frac{a}{N}$ diviso per N, cioè $\frac{a}{N^2}$, diverrà trascurabile rispetto a $\frac{a}{N}$, quando questo lo è rispetto ad a; diremo che $\frac{a}{N^2}$ è infinitesimo di secondo ordine.

Questi infinitesimi intervengono nel calcolo delle derivate.

Così al numero 22 bis, abbiamo trovato che l'incremento di x^3, corrispondente all'incremento $\frac{1}{N}$ della variabile x, è

$$\frac{3x^2}{N} + \frac{3x}{N^2} + \frac{1}{N^3};$$

dopo aver moltiplicato per N esso diviene:

$$3x^2 + \frac{3x}{N} + \frac{1}{N^2}.$$

Per avere la derivata dobbiamo far crescere indefinitamente il numero N; allora i termini $\frac{3x}{N}$ e $\frac{1}{N^2}$ divengono infinitesimi, cioè tendono allo zero, e il limite a cui tende l'espressione precedente, cioè la derivata, è $3x^2$.

V'è un caso nel quale bisogna ricordarsi di questi termini legittimamente trascurati ed è quando ci permettiamo di dare ad N un valore *finito*, come 100 oppure 1000 od anche 10000 invece d'un valore infinito.

Infatti è chiaro che se nell'espressione:

$$3\,x^2 + \frac{3\,x}{N} + \frac{1}{N^2},$$

in cui x sia piccolissimo, diamo ad N il valore 100, ciò che dà:

$$3\,x^2 + \frac{3\,x}{100} + \frac{1}{10000},$$

i due ultimi termini possono non essere trascurabili nè l'uno nè l'altro. Ora per vedere ciò che vi è di sottile nella distinzione fra gli infinitesimi dei diversi ordini, diamo ad x il valore 0,0001; i due termini considerati saranno $\frac{0{,}0003}{100}$ e $\frac{1}{10000}$ od ancora 0,000003 e 0,0001, di modo che il termine di secondo ordine è molto più grande di quello di primo. In realtà nè l'uno nè l'altro sono degli infinitamente piccoli, poichè abbiamo dato ad N un valore limitato: 100. La distinzione non è vera che quando N tende all'infinito. Ma si vede che bisogna penetrar più addentro per utilizzare praticamente queste nozioni.

81 *bis*. Applicazione dei differenziali ai calcoli approssimati. — Precisamente, nei calcoli approssimati dedotti dalla conoscenza dei differenziali, si danno ad N dei valori finiti e ne risultano degli errori che non sono sempre trascurabili. L'applicazione dei differenziali ai calcoli speditivi è principalmente impiegata in astronomia, ma ne daremo una idea aiutandoci con un esempio semplice. Eseguiremo uno stesso calcolo col metodo aritmetico, che è naturalmente più preciso quando lo si può applicare, e col metodo analitico, più rapido e più generale.

Problema. — Di quanto cresce il volume d'un serbatoio cubico di 1 *metro di lato quando questo lato aumenta di* 1 *millimetro?*

METODO ARITMETICO.

Il volume primitivo era:

$$1 \times 1 \times 1 = 1 \text{ metro cubo,}$$

Esso diventa:

$$1{,}001 \times 1{,}001 \times 1{,}001 = 1{,}003\,003{\cdot}001 \text{ m}^3.$$

Risposta. — Esso aumenta di:

$$0{,}003\,003\,001 \text{ m}^3.$$

Il metodo analitico non sarà molto più corto in questo semplice caso, ma eviterà le moltiplicazioni.

METODO ANALITICO.

Se il volume è y ed il lato x, si ha $y = x^3$; la derivata di y è $3x^2$ ed il differenziale $dy = 3x^2dx$.

Ora poniamo

$$dx = 0{,}001 \quad \text{e} \; x = 1;$$

otteniamo

$$dy = 3 \times 1 \times 0{,}001 = 0{,}003 \text{ m}^3.$$

CONFRONTO.

Con l'aritmetica si trova 0,003 003 001;

Con l'analisi si trova 0,003.

L'errore proviene dall'aver considerato dx come una quantità finita, cioè dall'aver assunto

$$dx = \frac{1}{N} = \frac{1}{1\,000}.$$

Nella valutazione dell'incremento della funzione volume si sono allora trascurati i termini

$$\frac{3x}{N^2} = \frac{3}{1\,000\,000} = 0{,}000\,003,$$

e:

$$\frac{1}{N^3} = \frac{1}{1\,000^3} = 0{,}000\,000\,001,$$

sicchè la valutazione analitica dell'incremento stesso è risultata approssimata; è questa la ragione del divario fra i risultati.

Insomma i termini $\frac{3x}{N^2}$ e $\frac{1}{N^3}$ divengono effettivamente trascurabili quando N cresce indefinitamente, ma non lo sono più se ad N si dà un valore finito costante, per quanto grande esso sia.

Fermiamoci qui, poichè non è nei calcoli approssimati che risiede il vero interesse dei differenziali.

82. Differenziali di somma, differenza, prodotto, ecc. — Quando dovremo differenziare una somma, un prodotto, un quoziente, un seno, un logaritmo o qualunque altra espressione contenente x, che cosa faremo?

Prenderemo la derivata e la moltiplicheremo per dx.

Si debba ad esempio differenziare una somma:

$$y = 3\,x^4 + 2\,x^3 - ax,$$

la derivata è:

$$y' = 12\,x^3 + 4\,x - a;$$

moltiplichiamo per dx ed avremo il differenziale:

$$dy = 12\,x^3\,dx + 4\,x\,dx - a\,dx.$$

Invece di scrivere y' è meglio usare la notazione $\frac{dy}{dx}$, la quale, come abbiamo visto, indica egualmente la derivata di y rispetto ad x. Ricominciamo in questo modo; sia:

$$y = 3\,x^4 + 2\,x^2 - ax;$$

la derivata è:

$$\frac{dy}{dx} = 12\,x^3 + 4\,x - a.$$

Moltiplichiamo per dx per avere il differenziale:

$$dy = 12\,x^3\,dx + 4\,x\,dx - a\,dx.$$

Si debba ora differenziare:

$$y = \text{sen}\,x.$$

Sappiamo che la derivata del seno è eguale al coseno; scriviamolo:

$$\frac{dy}{dx} = \cos\,x,$$

da cui ricaviamo:

$$dy = \cos x \; dx,$$

che è il differenziale cercato.

Sia ancora da differenziare:

$$y = \ln x;$$

si tratta di un logaritmo neperiano (perchè è indicato con ln).

Abbiamo visto al numero 74 che la derivata è $1/x$; scriviamola:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Moltiplicando per dx, abbiamo:

$$dy = \frac{dx}{x},$$

che è il differenziale cercato.

Si vede che il calcolo dei differenziali si riconduce al calcolo delle derivate, da cui differisce solo per la scrittura. Le due forme hanno dei vantaggi particolari.

CAPITOLO XIII

IL MONTONE INTEGRALE E LE FUNZIONI PRIMITIVE

83. Il problema inverso della derivazione. — Il calcolo delle derivate consiste nel misurare l'incremento unitario d'una grandezza. Per esempio, per la grandezza $y = x^2$ abbiamo trovato che il suo incremento unitario era misurato da $2x$, che si chiama derivata di x^2.

Inversamente il calcolo integrale consiste, conoscendo la derivata, nel ritrovare la funzione primitiva da cui essa proviene.

Quale è la funzione primitiva che ha per derivata $2x$? è x^2. L'operazione di risalire da $2x$ ad x^2 dicesi integrazione. Soltanto non si parte da una derivata ma da un differenziale; così siccome la funzione x^2 ha per differenziale $2xdx$, si dice che l'integrale di $2xdx$ è x^2. Ciò che si scrive:

$$\int 2xdx = x^2.$$

Il segno $\int$, che leggesi *integrale*, rappresenta una S allungata; esso significa *somma*. Vedremo perchè è legittimo di considerare una funzione primitiva come la somma dei valori del suo differenziale.

84. La grandezza totalizza l'accrescimento. — Immaginiamo dapprima una grandezza che si possa far variare a piacimento, per es. la quantità d'acqua contenuta in un serbatoio. Chiamiamo y il volume dell'acqua, che riterremo funzione del tempo x misurato in ore a partire da un istante in cui il serbatoio è vuoto.

Dei rubinetti regolabili permettano di riempire o di svuotare il serbatoio. — Abbiamo supposto che all'inizio il serbatoio sia vuoto, quindi il volume d'acqua è zero:

$$y = 0.$$

Versiamo acqua nel serbatoio, in ragione di 12 litri all'ora, per 3 ore; l'accrescimento di y in litri all'ora è 12; è una derivata:

$$y' = 12;$$

l'incremento 3 del tempo x lo indicheremo con Δx.

Il volume è aumentato di:

$$y' \, \Delta x = 12 \times 3 = 36 \text{ litri.} \qquad (1)$$

Versiamo ora 10 litri all'ora per mezz'ora. L'accrescimento orario (o derivata) è $y' = 10$.

Il tempo è:

$$\Delta x = \tfrac{1}{2}.$$

Il volume d'acqua aumenta di:

$$y' \, \Delta x = 10 \times \tfrac{1}{2} = 5 \text{ litri.} \tag{2}$$

Svuotiamo ora il serbatoio in ragione di 6 litri all'ora, per ¼ d'ora.

La derivata è:

$$y' = -6.$$

Il tempo è:

$$\Delta x = \frac{1}{4}.$$

Il volume cresce (in senso algebrico) di:

$$y' \, \Delta x = (-6) \times \frac{1}{4} = -1{,}5 \text{ litri.} \tag{3}$$

Riempiamo di nuovo in ragione di 20 litri all'ora durante 5 ore.

Il volume cresce di:

$$y' \, \Delta x = 20 \times 5 = 100 \text{ litri.}$$

Valutiamo il volume dell'acqua nel serbatoio alla fine della esperienza, ciò che faremo sommando i volumi entrati nel serbatoio durante i diversi intervalli di tempo:

Prima operazione .... $y' \Delta x = + 36$ litri
Seconda operazione ... $y' \Delta x = + 5$ »
Terza operazione ..... $y' \Delta x = - 1,5$ »
Quarta operazione .... $y' \Delta x = + 100$ »
In totale.. $\Sigma y'\Delta x = 36 + 5 - 1,5 + 100 = 139,5$ l.

La somma di tutti i prodotti come $y' \Delta x$ è eguale al volume d'acqua contenuto nel serbatoio, volume che abbiamo chiamato la funzione y. Ora, ciascun prodotto come $y' \Delta x$ è un incremento della funzione. Così la somma degli incrementi riproduce la funzione; ciò si scrive:

$$y = \Sigma\, y'\Delta x.$$

Invece di fare variare quattro volte la portata, avremmo potuto farla variare di minuto in minuto o di secondo in secondo od anche per intervalli di tempo piccolissimi dx; l'integrazione, cioè la somma di tutti gli $y'dx$, avrebbe dato sempre la funzione y, cioè

$$y = \int y'\, dx.$$

85. Un peso misurato da una superfice. — Per rimanere fedeli ai metodi concreti che caratterizzano questo libretto immaginiamo un agnello il cui peso, per convenzione, passi in maniera continua da zero a 9,5 chilogrammi nei 15 primi giorni della sua esistenza. Siccome siamo padroni delle nostre ipotesi, tracciamo a piacimento la curva del suo peso y in chilogrammi (fig. 37) e deduciamone la curva del suo ingrassamento y' in chilogrammi al giorno (sappiamo derivare graficamente; N. 35).

Alla fine del primo giorno l'agnello pesa 1 chilo-

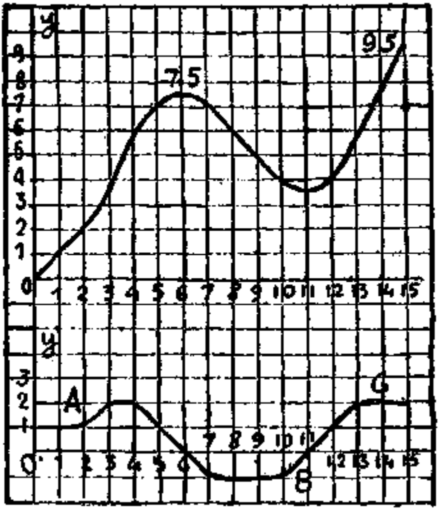


Fig. 37.

grammo; il secondo giorno, 2 chilogrammi; il terzo giorno, 3 chilogrammi e $\frac{1}{2}$, ecc.

Nel primo giorno l'ingrassamento è di 1 chilogrammo al giorno, nel secondo giorno, di 1 chilogrammo al giorno, nel terzo giorno di 1,5 chilogrammi al giorno etc. Osserviamo una cosa importante: la curva del peso *totalizza* la superfice della curva derivata. Ecco come:

Il 4 gennaio la superfice limitata dall'arco della derivata, dalle ordinate dei suoi estremi, e dall'asse x (detta quadratura dell'arco) è di 5 quadratini e $\frac{1}{2}$. Ora vediamo in alto che l'agnello pesa 5 chilogrammi e $\frac{1}{2}$. Il 6 gennaio la quadratura della derivata è di 7 quadratini e $\frac{1}{2}$, e l'agnello pesa 7,5 chilogrammi, come è mostrato dalla curva del peso.

Ne segue che per avere il peso ad un istante dato possiamo seguire due vie: 1° contare i chilogrammi sulla ordinata della curva primitiva; 2° contare i quadratini (superfice) nella quadratura della curva derivata. Va da sè che i quadratini sotto l'asse x vanno sottratti, poichè il montone dimagra.

Calcoliamo così il peso al quindicesimo giorno:

Superfice $A = 7$ quadratini e $\frac{1}{2}$ positivi.
Superfice $B = 4$ quadratini negativi.
Superfice $C = 6$ quadratini positivi.
Superfice totale $= 7 + \frac{1}{2} - 4 + 6 = 9$ quadr. $\frac{1}{2}$

Il peso è di 9 chilogrammi e $\frac{1}{2}$ ed è ciò che possiamo constatare sulla curva primitiva.

Ciò fornisce un mezzo grafico per integrare una derivata. La si traccia su carta quadrettata (millimetrata) ed in ciascun punto si portano delle ordinate primitive proporzionali al numero dei quadratini a partire dall'origine.

86. Integrale definito fra due limiti. — Ci siamo rivolti al caso più semplice nel quale il peso partiva dallo zero; abbiamo visto che la curva primitiva o integrale totalizzava la superfice della derivata.

Prendiamo il caso d'un valore iniziale non nullo. Abbiasi un montone che pesi 10 chilogrammi al 1° gennaio, 12 kg al 1° febbraio, ecc., come indica la prima curva della figura 38.

Sia y il peso ed y' l'ingrassamento in chilogrammi al mese, e sia x il tempo in mesi.

Per vedere come varia il peso dal 1° febbraio al 1° aprile (cioè fra due limiti) dividiamo il tempo in 6 decadi. Portiamo i pesi, come ordinate, di 2 in 2 chilogrammi.

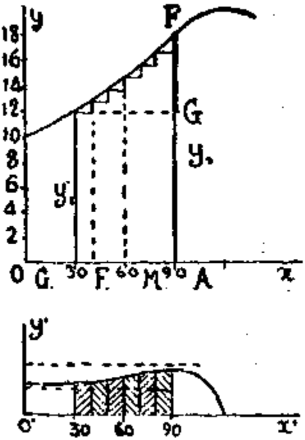


Fig. 38.

Dividiamo la superfice della derivata in 6 strisce, corrispondenti a queste decadi. Al 30° giorno l'ingrassamento è misurato dall'ordinata della derivata, cioè da y', che supponiamo circa 2,400 chilogrammi al mese. La decade vale $\frac{1}{3}$ di mese: $\Delta x = \frac{1}{3}$

Il peso aumenterà nella prima decade approssimativamente di

$$y' \Delta x = \tfrac{1}{3} \times 2{,}400 = 0{,}800 \text{ kg},$$

che è la quantità di cui cresce l'ordinata nella curva del peso. Dunque l'ordinata cresce d'un piccolo scalino verticale proporzionale alla superfice $y' \Delta x$ della prima striscia.

La cosa si ripete cinqu volte e quando la superfice sarà aumentata di 6 strisce, l'ordinata sarà cresciuta di 6 scalini. Ne segue che GF totalizza la superfice tratteggiata come pure l'ingrassamento totale dal 30° giorno al 90°, cioè dal 1° febbraio al 1° aprile.

Cercare di quanto ingrassa il montone dal 1° febbraio al 1° aprile è ciò che si chiama trovare l'integrale definito dell'ingrassamento fra due limiti (1° febbraio-1° aprile).

Siccome l'ingrassamento è la somma di tutti gli $y'\,dx$ che si possono formare (per quanto numerosi siano) vediamo che per calcolare:

$$\int_{1^\circ \text{ Febbraio}}^{1^\circ \text{ Aprile}} y'\,dx,$$

(somma dal 1° febbraio al 1° aprile di tutti gli $y'\,dx$ o ingrassamento $\times$ tempo), basta pesare il montone al 1° febbraio ed al 1° aprile e fare la differenza fra il secondo peso ed il primo: $y_2 - y_1$.

Ne segue che la bilancia è il più diffuso fra tutti gli apparecchi d'integrazione definita. Essa totalizza od integra l'ingrassamento.

Possiamo scrivere:

$$\int_{1^\circ\ \text{Febbraio}}^{1^\circ\ \text{Aprile}} \text{ingrassamento} \times \text{tempo} =$$

= differenza fra il peso al 1° aprile e il peso al 1° febbraio;

ciò si scrive matematicamente :

$$\int_{x=1}^{x=3} y'\, dx = y_3 - y_1,$$

ove i limiti $x = 1$ mese e $x = 3$ mesi segnano il principio e la fine dell'operazione.

87. Integrazione definita e indefinita d'una derivata. — Anzitutto l'integrazione indefinita è per noi la più semplice.

Nel caso del montone essa consisteva, conoscendo la curva derivata (cioè dell'ingrassamento) nel ritrovare la curva del peso ed a tracciarla interamente, indefinitamente.

Quando la derivata è data da una formola come $y' = 2x$, la cosa è assai più semplice. Non c'è bisogno di tracciare la curva per trovare l'integrale di $2x$; basta ricordare che la funzione x^2 ha per derivata $2x$ e per differenziale $2x\, dx$.

Si scrive allora:

$$\int 2\, x\, dx = x^2 + C;$$

abbiamo visto al numero 39 perchè bisogna aggiungere la costante d'integrazione C.

Ma se mi si domanda di calcolare:

$$\int_{x=1}^{x=2} 2\,x\,dx$$

entro due limiti, ricorderò la mia formola e dirò:

l'integrale indefinito di $2x dx$ è x^2;
ma per $x = 1$ si ha $x^2 = 1$,
e per $x = 2$ si ha $x^2 = 4$;

bisogna fare la differenza dei due valori così ottenuti: $4 - 1 = 3$:

$$\int_{x=1}^{x=2} 2\,x\,dx = 3.$$

Si calcola l'integrale indefinito x^2 e si fa la differenza dei due valori di x^2 ottenuti mettendo al posto di x i suoi valori ai limiti.

88. Quadratura. — Rappresentiamo graficamente la derivata $y' = 2x$ ed il suo integrale $y = x^2$ (fig. 39); l'integrale definito di y' da 1 a 2 è eguale a $y_2 - y_1 = 3$.

Esso misura la superfice limitata dal corrispondente arco della derivata, dalle ordinate dei suoi estremi e dall'asse x.

L'integrazione d'una derivata dà dunque il mezzo di misurare la sua superfice fra due limiti.

Ciò si chiama anche fare una quadratura. Ne faremo più avanti. Prevediamo però già due applicazioni di questo fatto:

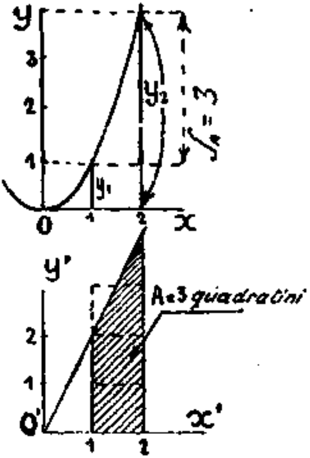


Fig. 39.

1° si può sostituire una misura di superfice con una integrazione;

2° reciprocamente si può sostituire un'integrazione con la misura d'una superfice.

Lo scopo di questo capitolo era di darci delle nozioni semplici. Ora le applicheremo.

CAPITOLO XIV

INTEGRAZIONE IMMEDIATA

89. Principio del metodo. — Quando si parla d'integrazione senza specificare oltre vuol dire che si tratta d'una integrazione indefinita, cioè che bisogna, conoscendo un differenziale od una derivata, risalire alla funzione. Sappiamo che basta ricordarsi il calcolo della derivata e che non bisogna dimenticare di aggiungere una costante d'integrazione.

Così x^3 ha per derivata $3x^2$ e per differenziale $3x^2dx$, quindi, inversamente, l'integrale di $3x^2dx$ è x^3:

$$\int 3\, x^2\, dx = x^3 + C;$$

aggiungo C perchè $x^3 + 4$ oppure $x^3 + a$ oppure $x^3 + C$ hanno tutte per derivata $3x^2$ e perchè voglio rimanere nel caso generale.

90. Potenze di x. — Sappiamo che la derivata di x^4 è $4\, x^3$. Quindi inversamente:

$$\int 4\, x^3\, dx = x^4 + C.$$

Proviamo ora ad integrare non $4x^3$, ma semplicemente x^3. Con qualche tentativo riusciremo a trovare il risultato. Ricordiamo che per derivare dobbiamo abbassare l'esponente di un'unità. Quindi dovremo fare l'operazione inversa e l'esponente sarà 4, ma la derivata di x^4 è $4x^3$ che è quattro volte maggiore; proviamo con $\frac{1}{4}x^4$, la derivata è proprio $\frac{4}{4}x^3$, cioè x^3. È quanto cercavamo, quindi:

$$\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + C.$$

Dunque, per integrare una potenza di x, bisogna aumentare l'esponente di un'unità e dividere per il nuovo esponente.

Così, siccome x^m ha per derivata mx^{m-1}, inversamente:

$$\int mx^{m-1}\,dx = \frac{m}{m}x^m + C = x^m + C;$$

parimenti si ha:

$$\int x^m\,dx = \frac{1}{m+1}x^{m+1} + C.$$

91. Coefficienti costanti. — Osserviamo che ogni costante che moltiplica il differenziale moltiplica pure l'integrale.

Così avendo:

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}\,x^3 + C,$$

si ha pure:

$$\int 5\,x^2\,dx = \frac{5}{3}\,x^3 + C\,;$$

infatti se calcoliamo la derivata di $\frac{5}{3}\,x^3$ troviamo $\frac{15}{3}\,x^2$, cioè $5\,x^2$.

Si esprime questo fatto dicendo che si può portar fuori dall'integrale un coefficiente costante.

Nel nostro caso:

$$\int 5\,x^2\,dx = 5\int x^2\,dx = 5 \times \frac{1}{3}\,x^3 + C$$

$$= \frac{5}{3}\,x^3 + C\,.$$

92. Costanti aggiunte. — La derivata di $x^3 + 4x$ è $3x^2 + 4$.

Inversamente si deve avere:

$$\int 3\,x^2\,dx + 4dx = x^3 + 4\,x + C.$$

Il termine $4\,dx$ è un elemento differenziale che proviene da un termine numerico della derivata.

Ora il termine che ha per derivata 4 non può essere che $4x$, quindi integreremo $4\,dx$ con $4\,x$.

Del resto il solo criterio è il seguente:

Quando avrete trovato l'integrale, verificate, prendendone la derivata e moltiplicandola per dx, se riottenete il differenziale proposto.

Nell'ultimo esempio, derivando $x^3 + 4x$ troviamo $3x^2 + 4$ che moltiplicato per dx ci dà precisamente $3x^2\,dx + 4\,dx$ che è il differenziale proposto.

93. Integrale d'una somma. — Siccome la derivata d'una somma di funzioni è la somma delle derivate degli addendi, sarà la stessa cosa dei differenziali e quindi degli integrali. Così per integrare una somma di funzioni (o di differenziali) integreremo ciascun termine della somma col suo segno. Ad esempio sia da integrare il differenziale:

$$dy = 5\,x^4\,dx - 3\,x^2\,dx + 4\,x\,dx;$$

integrando ogni termine otterremo:

$$\frac{5}{5}\,x^5 - \frac{3}{3}\,x^3 + \frac{4}{2}\,x^2,$$

e semplificando:

$$x^5 - x^3 + 2\,x^2.$$

94. Prodotti. — Supponiamo di dover integrare una funzione sotto forma di prodotto; ad esempio si debba valutare l'integrale:

$$\int (x + 2)\ (x - 2)\ dx.$$

Si presenta molto difficile la determinazione diretta di una funzione che abbia per derivata $(x + 2)\ (x - 2)$. È opportuno eseguire il prodotto indicato, ed allora la funzione da integrare assume la forma $x^2 - 4$. L'integrale diviene:

$$\int (x^2 - 4)\ dx = \int x^2\, dx - 4\, dx$$
$$= \frac{1}{3} x^3 - 4\, x.$$

95. Alcune formole d'integrazione immediata. — Ricordando i risultati ottenuti quando calcolammo le derivate, possiamo integrare a prima vista alcuni differenziali usuali.

Siccome la derivata di sen x è cos x, avremo:

$$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C.$$

Poichè la derivata di cos x è — sen x e la derivata — cos x è sen x avremo:

$$\int (-\operatorname{sen} x)\, dx = \cos x + C,$$

ed anche:

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C.$$

La funzione e^x ha per derivata e^x, quindi:

$$\int e^x \, dx = e^x + C;$$

cioè la sua integrazione la riproduce a meno d'una costante.

La funzione $2\sqrt{x}$ ha per derivata $\frac{1}{\sqrt{x}}$, per cui:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = 2\sqrt{x} + C.$$

La funzione $\ln x$ ha per derivata $\frac{1}{x}$, quindi:

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C.$$

Utilizzando queste facili ed importanti formule di integrazione, e la regola esposta al n. 93, giustificherete subito le seguenti eguaglianze:

$$\int \left(\cos x + \frac{1}{x} \right) dx = \operatorname{sen} x + \ln x + C;$$

$$\int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \frac{1}{3} x^3 + 2\sqrt{x} + C.$$

Potrete voi stessi esercitarvi ad integrare somme di potenze di x con funzioni trigonometriche, logaritmi ed esponenziali.

Tuttavia troverete molte funzioni, che resisteranno all'integrazione immediata. Potranno servire in molti casi altri metodi di integrazione, che ora impareremo.

Noi non possiamo che accennare brevemente ad alcuni dei numerosi argomenti del nostro vasto soggetto. Per noi, che non siamo matematici, non è essenziale conoscere a fondo i metodi, bensì comprenderne il meccanismo e le più semplici applicazioni. Vogliamo semplicemente istruirci; non siamo specialisti, e preferiamo, come diceva Pascal, sapere piuttosto un po' di tutto che non tutto di una sola cosa.

Sappiamo già tante cose del calcolo integrale. Tentiamo d'impararne un po' di più.

CAPITOLO XV

ALTRI METODI D'INTEGRAZIONE INDEFINITA

96. Integrazioni per parti. — Non bisogna credere che l'integrazione per parti consista nell'integrare un polinomio termine a termine. Abbiamo già appresa questa operazione nel capitolo precedente, parlando dell'integrale d'una somma.

Ora si tratta di elementi non direttamente integrabili ma che si possono considerare come facenti parte del differenziale di un prodotto.

Questo artificio pur così semplice è in generale così poco spiegato che molti allievi ne applicano la formola senza bene comprenderla.

Per preparare il terreno prendiamo un caso in cui l'artificio è inutile poichè la derivata del prodotto è completa.

Vi ricordate che la derivata d'un prodotto di due funzioni di x si ottiene moltiplicando ciascun fattore per la derivata dell'altro e sommando i risultati.

Così:

$$D . uv = uv' + u'v;$$

la funzione primitiva uv ha quindi per derivata $uv' + u'v$ e per differenziale:

$$uv'dx + u'vdx.$$

Essa è, naturalmente, l'integrale del suo differenziale, e si ha quindi:

$$uv = \int uv'dx + \int u'vdx. \qquad (1)$$

Supponiamo ora di dover calcolare un integrale della forma:

$$\int uv'dx + \int u'vdx;$$

in virtù di quanto abbiamo ora ricordato, sappiamo che esso è eguale a uv.

Ripetiamo tutto ciò applicandolo ad un esempio.

Partiamo da un prodotto che differenzieremo per imparare ad integrarlo in seguito.

Sia dunque da differenziare il prodotto $x \times e^x$.

Anzitutto dobbiamo derivare. Moltiplichiamo la derivata di x, che è 1, per e^x, ciò che ci dà $1 \times e^x$, poi moltiplichiamo x per la derivata di e^x, che è e^x, ciò che ci dà xe^x. Sommando abbiamo la derivata richiesta:

$$1 \times e^x + xe^x.$$

Per avere il differenziale moltiplichiamo per dx e otteniamo:

$$1 \times e^x\,dx + xe^x\,dx.$$

Allora, se si deve eseguire l'integrale di questa somma, cioè

$$\int 1 \times e^x\,dx + \int xe^x dx,$$

riconosciamo tutti gli elementi provenienti dal prodotto dianzi considerato, e scriveremo senza indugio

$$\int e^x\,dx + \int xe^x\,dx = xe^x. \qquad (2)$$

Ora supponiamo di dovere integrare solo una parte del primo membro, precisamente $\int xe^x\,dx$; se abbiamo abbastanza esercizio vi scorgeremo una parte del differenziale del prodotto xe^x e se l'altra parte $e^x\,dx$ è integrabile facilmente, poco importa che non lo sia $xe^x\,dx$; possiamo infatti operare per differenza, perchè l'eguaglianza (2) ci dà:

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx.$$

Ora l'ultimo integrale rientra nel quadro degli integrali semplici che abbiamo studiato; infatti esso è e^x, come sappiamo; allora:

$$\int xe^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$
$$= e^x\,(x - 1) + C.$$

Eccovi adesso il procedimento generale.

Ricordiamo l'eguaglianza (1):

$$uv = \int uv'dx + \int u'vdx,$$

e risolviamola rispetto al primo integrale del secondo membro:

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'\,vdx. \qquad (3)$$

È questa una formula importantissima, che vi gioverà sapere a memoria. In essa è contenuta la regola della integrazione per parti.

Riprenderemo ora l'esempio precedente, per esporlo come viene esposto classicamente.

97. Impiego della formola. — Sia da calcolare $\int xe^x\,dx$. Siccome vediamo due fattori, x e e^x, giudichiamo vantaggioso di scorgervi una parte del differenziale d'un prodotto uv (il quale differenziale è $uv'\,dx + vu'dx$).

Dobbiamo dunque indicare x ed e^x con le lettere u e v'. La pratica consiglia di porre $x = u$ ed $e^x = v'$ (con numerosi esercizi acquisterete anche voi quella esperienza ch'è la più sicura guida nel calcolo degli integrali).

Posto dunque

$$x = u, \;\; e^x = v'$$

si deduce che

$$u' = 1 \quad \text{e} \quad v = e^x.$$

La formula (3) diviene, nel nostro caso,

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx,$$

e poichè sappiamo che l'ultimo integrale è eguale ad e^x, abbiamo:

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$$

o ancora:

$$\int xe^x dx = e^x\ (x - 1) + C.$$

È lo stesso risultato che ottenemmo prima.

Insomma la malizia consiste nel riconoscere nella espressione coriacea da integrare una parte della derivata di un prodotto, di cui l'altra parte sia tenera e si integra la parte coriacea per differenza, senza rompersi i denti.

Quando talune espressioni coriacee si riducono ad un sol fattore, si spinge l'astuzia fino a considerare questo fattore come moltiplicato per l'unità; e il bello è che qualche volta si raggiunge lo scopo. Così sia da calcolare:

$$\int \ln\ x\ dx;$$

moltiplichiamo l'espressione da integrarsi per 1, il che non cambia nulla. L'espressione diventa:

$$\int 1 \times \ln\ x\ dx.$$

Poniamo $\ln x = u$ e $1 = v'$; essendo la derivata di $\ln x$ eguale a $\frac{1}{x}$, si avrà $u' = \frac{1}{x}$. L'integrale di 1 è x, per cui si avrà $v = x$.

Introduciamo i quattro valori:

$$u = \ln x, \quad v' = 1, \quad u' = \frac{1}{x}, \quad v = x$$

nella formula fondamentale (3). Questa diventa:

$$\int \ln x \times 1 \cdot dx = \ln x \times x - \int \frac{1}{x} x dx$$

ossia:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int dx$$

poichè:

$$\frac{1}{x} x = 1 .$$

Siccome l'integrale di dx (oppure $1 \times dx$) è x, si ha infine:

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C = x (\ln x - 1) + C.$$

Vedete che l'artificio ha servito.

98. Mezzo per evitare le formole. — La formola fondamentale (3) è facile da impararsi a memoria, e la si può anche ricostruire facilmente.

Tuttavia non è indispensabile e v'insegnerò ora il mezzo per farne a meno.

Non avete che da inspirarvi a ciò che avete letto in principio di questo capitolo sulla derivata del prodotto.

Essa ha la forma d'una somma di due termini, ciascun termine comprende una primitiva ed una derivata.

Si osserverà che un termine può essere il prodotto di due fattori qualunque ma che bisogna dedurne l'altro mediante una derivazione ed una integrazione diretta.

Sia da calcolare:

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx.$$

Ho due fattori x e sen x; la derivata di x è 1, la primitiva di sen x è $-\cos x$.

Il termine che completa la derivata di un prodotto sarà dunque:

$$1 \times (-\cos x).$$

Le due primitive sono x e $-\cos x$.

Scriviamo che il prodotto $x \times (-\cos x)$ è l'integrale del suo differenziale. Abbiamo:

$$x(-\cos x) = \int x \operatorname{sen} x \, dx + \int 1 \times (-\cos x) \, dx$$

o ancora:

$$-x \cos x = \int x \operatorname{sen} x \, dx + \int (-\cos x) \, dx.$$

Ricaviamo l'integrale da calcolare:

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = -\int (-\cos x) \, dx - x \cos x$$

e siccome l'integrale di $\cos x$ è $-\operatorname{sen} x$
si ha:

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = \operatorname{sen} x - x \cos x + C.$$

Altro esempio. — Calcoliamo ora analogamente

$$\int x \cos x \, dx.$$

Ho due fattori x e $\cos x$: la derivata di x è 1, la primitiva di $\cos x$ è $\operatorname{sen} x$.

Il termine che completa la derivata di un prodotto sarà quindi:

$$1 \times \operatorname{sen} x.$$

Scriviamo che il prodotto delle primitive $x \times \operatorname{sen} x$ è l'integrale del suo differenziale. Avremo:

$$x \operatorname{sen} x = \int x \cos x \, dx + \int 1 \times \operatorname{sen} x \, dx.$$

Ricaviamone l'integrale da calcolare; avremo:

$$\int x \cos x \, dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, dx$$

ma l'integrale di $\operatorname{sen} x$ è $-\cos x$, da cui:

$$\int x \cos x \, dx = x \operatorname{sen} x - (-\cos x)$$

o finalmente:

$$\int x \cos x \, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C.$$

Teniamo bene a mente questo risultato che ci permetterà di risolvere un caso un po' più difficile.

Ricordiamo che per avere la derivata completa di un prodotto occorrono due primitive e due derivate, disposte simmetricamente in questo modo:

$$uv' + vu'.$$

Intraprendiamo ora il calcolo di:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx.$$

Ho due fattori x^2 e sen x, devo derivare l'uno ed integrare l'altro:

La derivata di x^2 è $2x$;

La primitiva di sen x è $- \cos x$;

Le due primitive sono dunque x^2 e $- \cos x$;

Scriviamo che il prodotto delle due primitive è l'integrale del suo differenziale:

$$x^2 (- \cos x) = \int x^2 \operatorname{sen} x \, dx + \int 2 x (- \cos x) \, dx$$

Ricaviamone l'integrale da calcolare:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = - \int 2 x (- \cos x) \, dx + x^2 (- \cos x);$$

portiamo fuori dal segno integrale il coefficiente 2 e scriviamo, badando ai segni:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = 2 \int x \cos x \, dx - x^2 \cos x.$$

Ma nell'esempio precedente abbiamo trovato che l'integrale di $x \cos x$ è:

$$x \operatorname{sen} x + \cos x + C;$$

utilizzando questo risultato, abbiamo:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = 2\, x \operatorname{sen} x + 2 \cos x - x^2 \cos x + C.$$

Ciò mostra che l'artificio dell'integrazione per parti può ripetersi più volte nel calcolo dello stesso integrale; i risultati ottenuti possono venire utilizzati in casi sempre più complessi.

99. In quali casi l'artificio torna opportuno. — In sostanza affinchè il giochetto riesca occorrono due condizioni. Esaminiamo l'esempio già trattato:

$$\int x \cos x \, dx;$$

i due fattori sono x e $\cos x$.

1° Bisogna che si possa facilmente derivare l'uno ed integrare l'altro a vista.

2° Bisogna che il prodotto dei due nuovi fattori sia più facile da integrarsi dell'espressione primitiva.

Qui abbiamo:

$$x \times \cos x;$$

possiamo anzitutto derivare x ed integrare $\cos x$, ciò che dà $1 \times \text{sen}\, x$ oppure $\text{sen}\, x$; siccome il differenziale $\text{sen}\, x\, dx$ è integrabile a vista, l'artificio servirà. Ma si sarebbe potuto anche, partendo da $x \cos x$ integrare x e derivare $\cos x$.

Ciò avrebbe dato:

$$\frac{x^2}{2} \times (-\text{sen}\, x).$$

Dovremmo allora integrare $\frac{x^2}{2}\,(-\text{sen}\, x)\, dx$,

e questo integrale sarebbe molto più difficile di quello proposto. Avremmo allora riconosciuto di aver seguito una via sbagliata.

Dapprima si brancolerà un po' ma in seguito si acquisterà assai rapidamente il fiuto necessario.

Fermiamoci ai quattro esempi trattati; questi sono elementari ma sufficienti per far capire il metodo, ciò che è il nostro solo scopo.

100. Metodo di sostituzione o di cambiamento della variabile. — L'artificio è analogo a quello della funzione di funzione che imparammo nel n. 50. Ma qui la malizia non riuscirà se non quando l'integrale diventa più semplice dopo il cambiamento della variabile.

Facciamo un esempio. Sia da calcolare l'integrale

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}};$$

poniamo $1 - x^2 = u$.

Siccome queste due quantità sono eguali tra loro lo saranno anche i loro differenziali (cioè esse crescono egualmente); quindi:

$$d\ (1 - x^2) = du;$$

ora è noto che il differenziale di 1 è zero, e quello di $-x^2$ è $-2xdx$; l'eguaglianza precedente diventa quindi:

$$-2xdx = du,$$

da cui si ricava:

$$xdx = -\frac{du}{2};$$

allora il numeratore dell'espressione da integrare può venir sostituito con $-\frac{du}{2}$ ed il denominatore con $\sqrt{u}$; l'integrale diventa:

$$\int \frac{x\ dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \int \frac{-\frac{du}{2}}{\sqrt{u}} = \int \frac{-du}{2\sqrt{u}} = -\int \frac{du}{2\sqrt{u}}.$$

Ma l'espressione $\frac{du}{2\sqrt{u}}$ è il differenziale di $\sqrt{u}$; infatti $\sqrt{u}$ ha per derivata $\frac{1}{2\sqrt{u}}$ e per differenziale:

$$\frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = \frac{du}{2\sqrt{u}},$$

quindi:

$$-\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = -\sqrt{u} + C.$$

Questo è il risultato; scriviamolo sostituendo u col suo valore $1 - x^2$:

$$-\sqrt{u} + C = -\sqrt{1 - x^2} + C.$$

È l'integrale che dovevamo calcolare:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\sqrt{1 - x^2} + C.$$

Diamo ancora qualche esempio abbreviando le spiegazioni che sarebbero identiche alle precedenti.

Calcoliamo:

$$\int \mathrm{tg}\, x\, dx.$$

Chiamiamo S l'integrale da calcolarsi, allora:

$$S = \int \frac{\mathrm{sen}\, x}{\cos x}\, dx$$

poichè la $\mathrm{tg}\, x$ è il quoziente $\dfrac{\mathrm{sen}\, x}{\cos x}$.

Poniamo $\cos x = u$. Differenziando e ricordando che la derivata di $\cos x$ è $-\operatorname{sen} x$, si ha:

$$-\operatorname{sen} x\, dx = du \quad \text{da cui} \quad \operatorname{sen} x\, dx = -du$$

e quindi:

$$S = \int \frac{-du}{u};$$

Ricordando che $\ln u$ ha per derivata $\frac{1}{u}$, è:

$$S = \int \frac{-du}{u} = -\ln u + C;$$

sostituiamo u col suo valore $\cos x$:

$$S = -\ln \cos x + C.$$

Ecco il risultato; notiamolo:

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln \cos x + C.$$

101. Condizioni di successo. — Ora possiamo fare un'osservazione, ed è che il giochetto riesce perchè le espressioni considerate contengono una funzione e la sua derivata.

Così nel caso precedente avevamo $\operatorname{tg} x$, ma l'abbiamo trasformata in $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, e questa può esprimersi mediante una funzione e la sua derivata.

Prendiamo ancora un altro esempio; sia da calcolare:

$$S = \int (2x + 1)(x^2 + x - 2)^2 \, dx.$$

L'artificio deve riuscire poichè la quantità chiusa nella prima parentesi è esattamente la derivata di quella che si trova nella seconda.

Porremo:

$$x^2 + x - 2 = u;$$

prendendo i differenziali avremo $(2x + 1)\, dx = du$, da cui si deduce:

$$2x + 1 = \frac{du}{dx}.$$

Introducendo questi valori nell'integrale si ha:

$$S = \int \frac{du}{dx} \times u^2 \, dx = \int u^2 \, du$$

l'integrale di u^2 è $\frac{u^3}{3}$, e quindi:

$$S = \frac{u^3}{3} + C;$$

sostituiamo u con $x^2 + x - 2$, e avremo

$$S = \tfrac{1}{3}(x^2 + x - 2)^3 + C.$$

Rimane da notare che non è proprio necessario che l'espressione contenga due elementi di cui l'uno sia la derivata esatta dell'altro; essi possono trovarsi moltiplicati per dei coefficienti costanti, il che non impedisce la semplificazione poichè questi coefficienti si possono portare fuori dell'integrale.

Illustriamo questo concetto con un ultimo esempio. Sia da calcolare l'integrale.

$$S = \int \frac{x}{1 + x^2} dx.$$

Abbiamo qui due elementi x e $1 + x^2$ di cui non si può proprio dire che x sia la derivata di $1 + x^2$, poichè questa derivata è $2x$; ma $2x$ o x è la stessa cosa *a meno di un fattore costante* che è $\frac{1}{2}$.

Invece di essere la derivata, x è la mezza derivata. Vedrete il fattore $\frac{1}{2}$ uscire dall'integrale senza disturbarci affatto.

Poniamo:

$$1 + x^2 = u;$$

differenziamo:

$$2x\, dx = du,$$

da cui:

$$x\, dx = \frac{du}{2};$$

sostituendo questi valori nell'integrale dato abbiamo:

$$S = \int \frac{x}{1 + x^2} dx = \int \frac{du}{2\, u} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u};$$

ma $\frac{du}{u}$ ha per integrale ln u, dunque $S = \frac{1}{2} \ln u + C$ e sostituendo u con $1 + x^2$ si ha:

$$S = \tfrac{1}{2} \ln (1 + x^2) + C.$$

Vedete che il fattore $\frac{1}{2}$ non ci ha contrastato il successo.

Quindi applicherete la regola del cambiamento di variabile tutte le volte che l'espressione si compone d'elementi di cui l'uno è la derivata dell'altro, anche a meno di un fattore costante.

Fermiamoci qui nello studio dell'integrazione indefinita. Gli altri procedimenti d'integrazione ci condurrebbero fuori del quadro elementare nel quale vogliamo restare. In pratica è raro che si venga fermati da una difficoltà d'integrazione, poichè i formularii e le opere speciali danno delle tavole d'integrali nelle quali basta attingere. L'essenziale è di cavarsela nei casi semplici e di comprendere il meccanismo del calcolo nei suoi principii fondamentali.

CAPITOLO XVI

INTEGRAZIONE DEFINITA E PLANIMETRIA

102. Richiamo del principio fondamentale. — Abbiamo già mostrato nel capitolo XIII come si possa calcolare per integrazione la superfice limitata da una curva. Richiamiamo il principio in base alla figura 40.

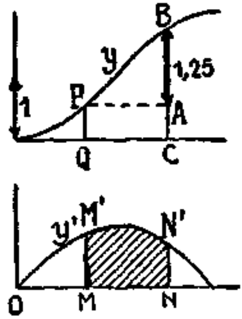


Fig. 40.

Sia y' una curva; si desidera quadrare il suo arco $M'\,N'$, cioè valutare l'area della superficie tratteggiata.

Sia y la curva integrale; l'area tratteggiata è misurata dalla differenza delle ordinate corrispondenti ai limiti dell'integrazione, cioè da AB. Si calcolerà quindi l'integrale definito tra O e M (che è indicato da QP), poi l'integrale definito tra O ed N (indicato da CB) e si farà la differenza (indicata da AB) la quale darà l'area richiesta. Degli esempi chiariranno la cosa.

103. Area della sinusoide. — La curva detta sinusoide è il diagramma della funzione sen x

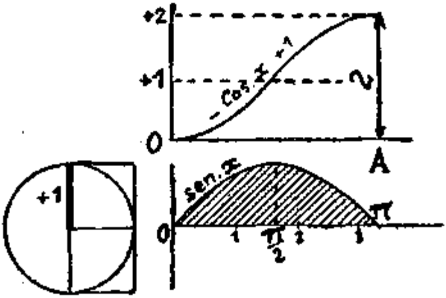


Fig. 41.

(fig. 41). Consideriamo questa funzione come una derivata e scriviamo quindi

$$y' = \text{sen}\, x;$$

il suo integrale è allora:

$$y = -\cos x + C.$$

Potremmo dare a C non importa qual valore, ma se vogliamo misurare comodamente le aree per mezzo delle ordinate della curva integrale è vantaggioso che questa passi per l'origine.

Per realizzare ciò prendiamo $C = 1$ e tracciamo la curva (o linea) integrale:

$$y = -\cos x + 1.$$

Questa passerà per l'origine, poichè per $x = 0$ si ha $\cos x = 1$ e quindi

$$y = -1 + 1 = 0.$$

Costruendo la curva integrale vedrete che la ordinata nel punto A è 2. Siccome l'ordinata all'origine è 0, la superfice tratteggiata è eguale a $2 - 0 = 2$.

L'unità di lunghezza è qui eguale al raggio del cerchio trigonometrico pure disegnato nella figura 41. La superfice 1 è il quadrato costruito su questo raggio. La superfice 2 è eguale a due volte il quadrato precedente; dunque l'area della sinusoide da 0 a π è uguale al doppio del quadrato costruito sul raggio.

Scriveremo anche, con la notazione del n. 86, che l'area richiesta è

$$S = \int_0^\pi \operatorname{sen} x \, dx = \Big[-\cos x \Big]^\pi$$

L'espressione:

$$\Big[\cos - x \Big]_0^\pi$$

significa: differenza dei valori di $-\cos x$ per $x = \pi$ e per $x = 0$.

Per $x = \pi$ si sa che $\cos x = -1$ e quindi $-\cos x = 1$; per $x = 0$ è noto che $\cos x = 1$ e quindi $-\cos x = -1$. Quindi la predetta differenza è 2.

La superficie è quindi 2, come avevamo trovato.

Se volessimo calcolare la superfice limitata fra le ordinate corrispondenti ai punti M e N della figura 40, avremmo da valutare $-\cos x$ per un arco eguale a ON, poi per un arco eguale a OM indi fare la differenza. Graficamente la cosa è più semplice; basterebbe (fig. 40) misurare AB, che è la differenza fra le ordinate sulla curva integrale.

Se è $AB = 1{,}25$ in parti di raggio, vuol dire che la superficie vale 1,25 volte il quadrato costruito sul raggio.

Non servirebbe a nulla saper fare dei calcoli che non mettano capo a dei numeri. Nel caso dell'area totale calcolata più sopra ed eguale a 2, se il raggio del cerchio è di 1 decimetro, l'area limitata dalla curva è di 2 decimetri quadrati.

Nel caso del calcolo grafico successivo, se il raggio del cerchio, fosse di 1 metro, l'area sarebbe di 1,25 m.^{2}

104. Area d'un segmento di parabola. — L'equazione della parabola, quando si prende il suo asse di simmetria come asse delle x, e la tangente nel vertice come asse delle y, è $y^2 = 2px$ (fig. 42). Se si prende al contrario l'asse di simmetria come asse delle y e la tangente nel vertice come asse x, è $x^2 = 2py$ (fig. 43); questa equazione si ottiene dalla precedente scambiando fra loro x e y. Prendendo $2p = 1$ si ha, con quest'ultimo sistema di riferimento, $x^2 = y$ ossia $y = x^2$.

Calcoliamo dunque (fig. 43) la superfice compresa

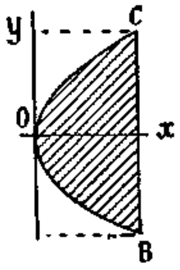


Fig. 42.

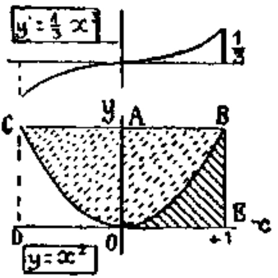


Fig. 43.

fra la curva $y = x^2$ e l'asse delle x, cioè quella del triangolo mistilineo *OBE*; troveremo poi facilmente l'area del segmento.

Consideriamo la curva come una derivata e poniamo:

$$y' = x^2;$$

il suo integrale è:

$$y = \frac{1}{3} x^3.$$

La quadratura dell'arco *OB*, compreso fra i punti di ascisse $x = 0$ e $x = 1$, è:

$$S = \int_0^1 x^2\,d\,x = \left[\tfrac{1}{3}\,x^3\right]^1 = \tfrac{1}{3} - 0 = \tfrac{1}{3}.$$

Siccome l'area del quadrato $OABE$ è eguale a 1, l'area del triangolo mistilineo OBA è $1 - \frac{1}{3}$, ossia 2/3. Ne segue che l'area del segmento di parabola punteggiato COB è eguale a due terzi del rettangolo $CDEB$ che lo contiene.

Lo stesso risultato vale per qualunque segmento parabolico, come si può verificare ponendo

$$OE = x_1 \text{ e } EB = y'_1.$$

Allora:

$$\text{area } OABE = x_1 y'_1 = x_1 x_1^2 = x_1^3$$

mentre:

$$S = \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^{x_1} = \tfrac{1}{3}\,x_1^3;$$

quindi S è un terzo di $OABE$.

105. Potenza del metodo. — La quadratura della parabola per mezzo del calcolo integrale è così semplice che quasi si può farla mentalmente.

Ora il primo metodo di quadratura della parabola rimonta ad Archimede, il quale non avendo a sua disposizione le risorse dell'analisi moderna trovò la soluzione per mezzo d'un metodo statico (immaginando dei triangoli e dei rettangoli sospesi a delle leve) e giustificò geometricamente il risultato; cioè: che l'area del segmento di parabola supera d'un terzo l'area del triangolo avente la stessa base e la stessa altezza del segmento. L'insieme di questo lavoro non era rappresentato da meno di 24 proposizioni.

Se si pensa alla potenza del genio d'Archimede si converrà che il calcolo integrale è un istrumento meraviglioso poichè mercè sua uno scolaro moderno può risolvere facilmente dei problemi che allora richiedevano un genio così prodigioso.

È doveroso aggiungere che dai metodi d'Archimede, ripresi da Fermat e da Roberval, nacque il calcolo integrale. Fermat citava continuamente Archimede, Leibniz l'ammirava fino ad esserne geloso e Newton si rimproverava di non averlo abbastanza studiato.

Le opere di Archimede sono state alcuni anni or sono tradotte in francese, e la loro lettura non si potrà mai abbastanza raccomandare (1).

106. Area d'un segmento d'iperbole equilatera. — La equazione dell'iperbole equilatera è $xy = k^2$, quando si prendono gli asintoti come assi delle coordinate.

La quadratura di questa curva è molto impor-

(1) *Oeuvres complètes d'Archimède*, par Paul Ver Eecke, Parigi.

tante, poichè se si chiamano y ed x la pressione ed il volume d'una massa gassosa che si espande, si ha pure $xy = k^2$, qualora l'espansione sia isotermica (legge di Boyle e Mariotte: $pv =$ costante).

Dunque, la quadratura di un arco dell'iperbole totalizza i prodotti ydx e di conseguenza misura il lavoro d'espansione.

Per il nostro calcolo, prendiamo il caso più semplice nel quale:

$$k^2 = 1;$$

abbiamo allora:

$$xy = 1,$$

o ancora:

$$y = \frac{1}{x}$$

(è una curva che conosciamo).

Consideriamo la nostra funzione come una derivata, allora:

$$y' = \frac{1}{x} \text{ (fig. 44)}.$$

il suo integrale è come sappiamo:

$$y = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + C.$$

La quadratura dell'arco compreso fra il vertice

B e il punto M d'ascissa x_1 è uguale al logaritmo neperiano di x_1.

Infatti, per valutare questa area, occorre inte-

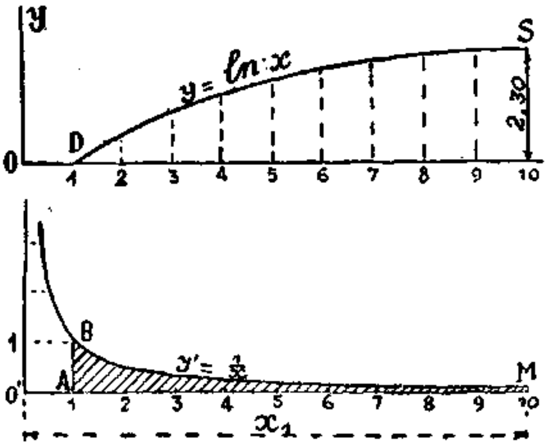


Fig. 44.

grare $\frac{1}{x}$ fra i limiti $x = 1$ e $x = x_1$:

$$S = \int_1^{x_1} \frac{1}{x}\, dx = \Big[\ln x\Big]_1^{x_1} = \ln x_1 - \ln 1;$$

ma ln 1, cioè il logaritmo dell'unità, è zero, per cui:

$$S = \ln x_1.$$

Per questa ragione i logaritmi neperiani si chiamano anche iperbolici.

Esempio numerico. — Se $O'A = 1$ centimetro ed $O'M = 10$ cm, si ha:

$$S = \ln 10 = 2{,}30 \text{ centimetri quadrati.}$$

Infatti il logaritmo decimale di 10 è 1 e bisogna moltiplicarlo per 2,30 circa per avere il logaritmo neperiano.

107. Coordinate polari. — Finora abbiamo sempre riferito le nostre curve a due assi ortogonali Ox e Oy. Un altro sistema di riferimento è quello delle coordinate polari; una curva C è allora riferita ad un centro O e ad una direzione fissa Ox (fig. 45).

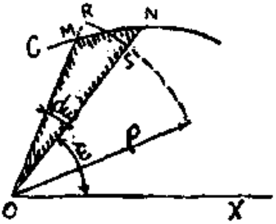


Fig. 45.

Per determinare un punto N bisogna conoscere due grandezze: l'angolo ω (omega) che ON fa con l'asse Ox e la distanza ON o raggio che si chiama r oppure l, oppure ϱ (lettera greca che si chiama *ro*).

Sia dunque CN una curva riferita ad un sistema di coordinate polari. Invece di una relazione fra x ed y se ne avrà una fra l'angolo ω ed il raggio ϱ, che rappresenterà la curva stessa. Ci proponiamo di valutare la superficie limitata da un arco qualsiasi della curva e dai due raggi che ne proiettano gli estremi da O. Una simile superficie sarà opportunamente considerata come formata da tanti piccoli triangoli, come OMN. Ciascuno di essi è assimilabile ad un piccolo settore di cerchio, come ORS; l'angolo al centro è $d\omega$, l'arco RS è dato dal prodotto dell'angolo $d\omega$ per il raggio ϱ, ed è quindi $\varrho\, d\omega$. L'area di questo settore è quella di un triangolo di base $\varrho d\omega$ e di altezza ϱ; è quindi

$$\varrho\, d\omega \times \frac{\varrho}{2} = \frac{1}{2}\, \varrho^2\, d\omega.$$

È questo un elemento della superfice che vogliamo valutare:

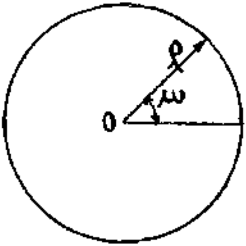


Fig. 46.

$$dS = \tfrac{1}{2}\, \varrho^2\, d\, \omega.$$

Per avere l'area di un settore della curva a partire dall'angolo ω_1 fino all'angolo ω_2, sommeremo le aree di questi piccoli triangoli:

$$S = \tfrac{1}{2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \varrho^2\, d\, \omega.$$

Applichiamo questa formola.

Area del cerchio (fig. 46). — L'equazione del cerchio è $\varrho = R$. La formola precedente ci dà:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \varrho^2 \, d\,\omega = \frac{1}{2} R^2 (2\,\pi - 0) = \pi R^2.$$

(Basta osservare che ϱ^2 è una costante, quindi l'integrale di $\varrho^2 d\,\omega$ è $\varrho^2\,\omega$, ossia $R^2\,\omega$. I due valori di ω ai limiti sono $2\,\pi$ e 0).

108. Area della lemniscata. — La lemniscata è una curva la cui equazione in coordinate polari è

$$\varrho^2 = 2a^2 \cos 2\,\omega.$$

Essa è rappresentata dalla figura 47: ha la forma di 8; il punto O, pel quale essa passa due volte, chiamasi punto doppio, e le tangenti in esso formano con l'asse polare gli angoli $\frac{1}{4}\pi$ e $\frac{1}{4}\pi$.

Quindi limitando l'integrale del paragrafo precedente da 0 a $\frac{1}{4}\pi$ avremo un quarto della superficie totale:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varrho^2 d\,\omega = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\,a^2 \cos 2\,\omega\, d\,\omega =$$

$$= \left| \frac{a^2}{2} \operatorname{sen} 2\,\omega \right|_0^{\frac{\pi}{4}};$$

Per $\omega = \frac{1}{4}\pi$ si ha che $2\,\omega = \frac{1}{2}\,\pi$.

e quindi $\operatorname{sen} 2\,\omega = 1$; mentre $\operatorname{sen} 2\,\omega = 0$ per $\omega = 0$; quindi si ottiene

$$S = \frac{a^2}{2}.$$

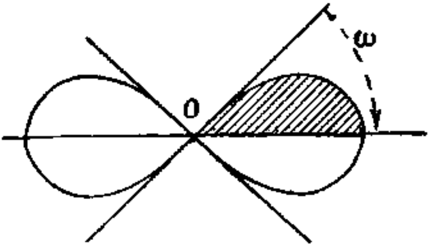


Fig. 47.

Questa è l'area della superficie tratteggiata nella figura 47, che è un quarto dell'area racchiusa da tutta la lemniscata; l'area complessiva è dunque

$$4\,\frac{a^2}{2} = 2\,a^2.$$

109. Planimetria sperimentale. — Si può misurare l'area di una curva, senza calcolarla, mediante vari procedimenti. Si può per es. tracciare la curva su carta quadrettata e contare i quadratini ch'essa contiene. Si può anche coprire l'area da misurare con tratteggi equidistanti; ciò corrisponde a suddividere l'area stessa in tante striscie generalmente assimilabili a trapezi aventi tutti la stessa altezza. Vi sono anche degli istrumenti detti planimetri.

CAPITOLO XVII

FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI ED INTEGRALI MULTIPLI

110. Funzioni di più variabili. — A bella posta abbiamo relegato quasi in fondo al libro lo studio delle funzioni di più variabili, studio un po' delicato che intrapreso troppo presto avrebbe potuto ingenerare un po' di confusione. Ne daremo ora un cenno.

Immaginiamo una grandezza che possa variare per diverse cause.

Tale è, per esempio, la portata di un fiume in tempo di pioggia. Questa portata dipende:

1° Dal tempo, perchè col crescere del tempo la pioggia continua a cadere e la portata cresce.

2° Dalla distanza dalla sorgente, perchè col crescere di questa aumenta la superfice del bacino imbrifero che alimenta il fiume, per cui aumenta anche la portata.

Indicheremo la portata con y (in metri cubi al secondo), il tempo con u e la distanza con z, e scriveremo:

$$y = f\ (u,\ z).$$

La scrittura $y = f(u, z)$ indica che la portata y è funzione delle due variabili u e z, ed è quindi analiticamente rappresentata da una relazione contenente il tempo u e la distanza z.

111. Accrescimento parziale e totale. — Immaginiamo un tronco del fiume sprovvisto di affluenti e nel quale la portata y dipenda unicamente dalla distanza della sezione dalla sorgente z, e dal tempo u.

Supponiamo che nella regione considerata la portata in una qualunque sezione aumenti ogni ora, in causa della pioggia, di 10 metri cubi al secondo, e che, d'altra parte, per il contributo dovuto all'ampliamento del bacino, aumenti di 50 metri cubi al secondo quando si discende il fiume di un chilometro.

Se in un'ora si discende il fiume di un chilometro, l'accrescimento totale della portata sarà:

1° di 10 metri cubi al secondo, in conseguenza del procedere del tempo u (in causa della pioggia);

2° di 50 metri cubi al secondo, in conseguenza dell'aumento della distanza z dalla sorgente (cioè in causa del contributo del territorio che si aggiunge al bacino). In tutto abbiamo un aumento della portata di 60 metri cubi al secondo.

Si vede senza altra dimostrazione che: se una grandezza cresce per due cause indipendenti, l'accrescimento totale dovuto ad una variazione unitaria di ciascuna delle due variabili è eguale alla somma degli accrescimenti parziali. Pertanto definiremo derivata totale di una funzione y che dipende da u e da z la somma delle derivate parziali prese l'una rispetto ad u supponendo z costante, l'altra rispetto a z supponendo u costante. Così, nel caso della portata:

$$y = f\ (u\ z);$$

indicheremo con y'_u e y'_z le derivate parziali, e scriveremo

$$y'_{uz} = y'_u + y'_z$$

112. Derivata parziale e totale. — Applichiamo la regola al seguente esempio. Sia da valutare la derivata totale della funzione:

$$y = u \times v \times z.$$

È questo un prodotto di tre variabili; per derivare y rispetto ad u consideriamo v e z come costanti, allora:

$$y'_u = vz;$$

parimenti:

$$y'_v = uz$$

e

$$y'_z = uv.$$

Scriveremo quindi:

$$y'_{uvz} = vz + uz + uv.$$

Ecco un esempio. Derivare:

$$y = az^2 + bzu + zu^2.$$

Le variabili sono z ed u. Si ha successivamente:

$$y'_u = bz + 2\,zu$$

e

$$y'_z = 2\,az + bu + u^2$$

e sommando:

$$y'_{uz} = bz + 2\,zu + 2\,az + bu + u^2.$$

113. Derivate parziali successive. — Siano da calcolare le derivate parziali seconde della funzione:

$$z = ax^2 + 2\,bxy + cy^2 + 2\,dx + 2\,ey + f.$$

Deriviamo una volta rispetto ad x e ad y; avremo le due derivate parziali prime:

$$z'_x = 2\,ax + 2\,by + 2\,d,$$

$$z'_y = 2\,bx + 2\,cy + 2\,e.$$

Derivando ciascuna di queste rispetto ad x otterremo due derivate seconde e derivandole rispetto ad y altre due derivate seconde, e cioè dapprima $z''_{xx} = 2a$ e $z''_{yx} = 2b$ ed in seguito $z''_{xy} = 2b$ e $z''_{yy} = 2c$.

Osserviamo che la derivata parziale seconda, calcolata derivando prima rispetto ad x e poi rispetto ad y è la medesima che si ottiene derivando dapprima rispetto ad y e poi rispetto ad x.

La proprietà constatata in questo esempio vale in generale e la si esprime dicendo che è lecito invertire l'ordine delle derivazioni.

114. Differenziali totali. — È chiaro che quanto abbiamo detto sulle derivate s'applica anche ai differenziali; ma c'è una notazione da imparare.

Quando si studiava la funzione

$$y = f\ (x),$$

si designava la derivata con y', oppure col quoziente dei due differenziali: $\frac{dy}{dx}$.

Si aveva:

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

e così pure:

$$dy = y'\ dx.$$

Sia ora una funzione y di due variabili u e z:

$$y = f\ (u, z);$$

indicheremo ancora il differenziale totale di y con

dy, e scriveremo che esso è la somma dei due differenziali parziali

$$dy = y_u' \, du + y'_z \, dz.$$

È usata anche una notazione diversa. Le due derivate parziali y'_u e y'_z si indicano spesso come segue:

$$\frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{e} \quad \frac{\partial y}{\partial z},$$

e si può quindi scrivere diversamente il differenziale totale:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial z} dz.$$

115. Calcolo d'un differenziale totale. — Sia da calcolare il differenziale totale della funzione

$$y = x^z.$$

Calcoliamo la derivata parziale di y rispetto ad x; si dovrà trattare la z come costante, per cui la derivata richiesta è zx^{z-1}, e ciò si indicherà scrivendo

$$\frac{\partial y}{\partial x} = zx^{z-1}.$$

Calcoliamo analogamente $\frac{\partial y}{\partial z}$; questa volta con sideriamo costante x; x^z è una funzione esponenziale:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = x^z \ln x.$$

Ma in base alla formola del numero precedente, si ha:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial y}{\partial z}\, dz,$$

e sostituendo:

$$dy = zx^{z-1}\, dx + x^z \ln x\, dz.$$

116. Integrali multipli. — Accenniamo al fatto che, come si derivano e si differenziano le espressioni che contengono più variabili, così si integrano. Gli integrali che si ottengono si dicono doppi $\int\int$ o tripli $\int\int\int$ od anche quadrupli e in generale si chiamano integrali multipli. I segni $\int\int$ e $\int\int\int$ significano somma doppia e tripla.

Non è nostra intenzione di sviluppare lo studio degli integrali multipli; ne vogliamo solo dare una idea per mezzo di esempi molto semplici.

117. Calcolo d'un integrale doppio. — Vogliamo calcolare il volume del tetraedro indicato nella fig. 48: esso è limitato da tre piani tra loro ortogonali che sono assunti come piani di riferimento e da un quarto piano qualunque. Dividiamo il tetraedro in tante fette sottili mediante piani paralleli al piano xz; sia Δy lo spessore di una fetta qualunque. Ogni fetta è, approssimativamente, un prisma

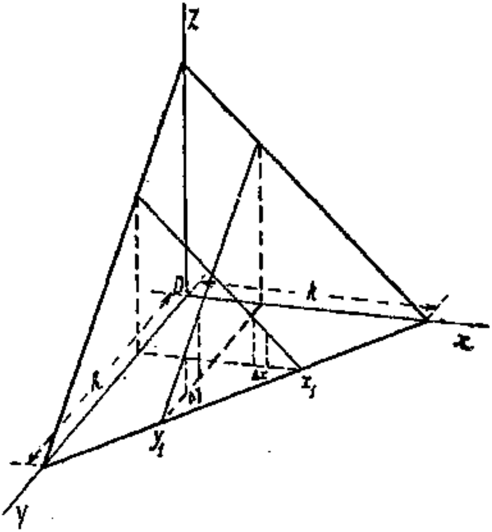


Fig. 48.

di altezza Δy, la cui base è triangolare e variabile con y.

Calcoliamo ciascuna base dividendo questa in strisce alte Δx e lunghe genericamente z. Evidentemente z è variabile con x e con y. Possiamo scrivere:

$$\text{Area d'una base} = \Sigma z \,\Delta x,$$

$$\text{Volume approssimativo della piramide} = \Sigma \Delta y \,(\Sigma z \Delta x)$$

ed avremo un volume tanto più approssimato quanto più i Δx e Δy sono piccoli. Al limite, quando Δx e Δy tendono a zero, avremo la esatta valutazione del volume; scriveremo:

$$\text{Volume} = \int dy \int z\, dx = \iint z\, dx\, dy.$$

L'integrale $\int z\, dx$ rappresenta l'area della sezione del tetraedro fatta con un generico piano parallelo al piano xz; esso è funzione di y (infatti la sezione diminuisce col quadrato di y).

Come vedete si tratta di integrali definiti, nel qual caso hanno senso gl'integrali multipli. $\int z\, dx$ va calcolato fra 0 e x_1 e l'altro integrale (quello rispetto ad y) fra 0 e h.

Quindi l'integrazione doppia equivale a due successive integrazioni semplici.

Se dividiamo il tetraedro in tante fette parallele al piano yz e di area $\Sigma z \,\Delta y$ e facciamo la somma di tutte le fette alte Δx, avremo al limite:

$$\text{Volume} = \int dx \int z\, dy;$$

$\int z\, dy$ va limitato fra 0 e y_1 e l'altro integrale (quello rispetto ad x) fra 0 e h. Invertendo l'ordine delle due integrazioni si giunge allo stesso risultato ma occorre però osservare che i limiti di ogni integrazione sono mutati.

118. Momento d'inerzia d'un cilindro ottenuto per mezzo d'un integrale triplo. — Consideriamo un cilindro materiale di raggio R (fig. 49) e di altezza h; esso sia omogeneo e di densità unitaria. Si può allora chiamare *momento d'inerzia* rispetto all'asse $0z$ la somma dei prodotti di ciascun

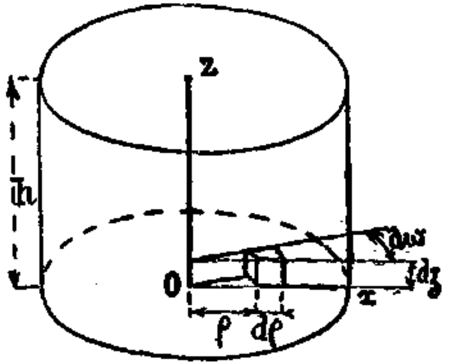


Fig. 49.

elemento del volume per il quadrato della sua distanza da $0z$.

Consideriamo un elemento di volume, avente per base l'elemento di superfice limitato fra due raggi formanti l'angolo $d\,\omega$ e fra due cerchi di raggi ϱ e $\varrho + d\,\varrho$, ed avente un'altezza dz.

La lunghezza del piccolo arco intercettato dai due raggi sulla circonferenza di raggio ϱ è $\varrho d\omega$;

la base dell'elemento è quindi $\varrho\, d\varrho\, d\,\omega$, il suo volume $\varrho d\varrho\, d\,\omega\, dz$ e quindi il suo momento d'inerzia:

$$\varrho^2\, \varrho d\varrho . d\,\omega . dz = \varrho^3\, d\varrho . d\,\omega . dz.$$

Il momento d'inerzia totale sarà la somma di tutti i prodotti simili a $\varrho^3\, d\varrho\, d\,\omega\, dz$ e siccome ci sono tre variabili ϱ, ω e z, sarà una somma tripla (integrale triplo):

$$M = \iiint \varrho^3\, d\varrho . d\,\omega . dz.$$

Integreremo dapprima rispetto all'angolo ω fra zero e 2π, indi il risultato ottenuto lo integreremo rispetto al raggio ϱ fra zero ed R, infine quest'ultimo risultato sarà integrato rispetto a z fra zero ed h. Così l'integrale triplo è ricondotto a tre integrali semplici che sappiamo calcolare.

Anzitutto, rispetto all'angolo ω abbiamo:

$$\int_0^{2\pi} \varrho^3\, d\,\omega = \varrho^3 \Big[\ \omega\ \Big]_0^{2\pi} = 2\,\pi\varrho^3,$$

poichè i due valori estremi di ω sono 0 e 2π; la loro differenza è 2π.

Integriamo ora $2\pi\varrho^3\, d\varrho$ rispetto al raggio ϱ fra zero ed R:

$$\int_0^R 2\,\pi\,\varrho^3\, d\,\varrho = 2\,\pi \left[\frac{1}{4}\,\varrho_4\right]_0^R = \frac{2\,\pi}{4}\,R^4 = \frac{\pi}{2}\,R^4,$$

poichè anzitutto l'integrale di $\varrho^3\,d\varrho$ è $\frac{1}{4}\varrho^4$ il quale per $\varrho = 0$ vale zero e per $\varrho = R$ vale $\frac{1}{4}R^4$; la differenza è $\frac{1}{4}R^4$; questa moltiplicata per 2π dà:

$$\frac{2\,\pi}{4}\,R^4 \text{ ossia } \frac{\pi}{2}\,R^4.$$

Non ci resta che da integrare $\dfrac{\pi}{2}\,R^4\,dz$ rispetto all'altezza z:

$$\int_0^h \frac{\pi}{2}\,R^4\,dz = \frac{\pi}{2}\,R^4\Big[\,z\,\Big]_0^h = \frac{\pi}{2}\,R^4\,h$$

che è il risultato cercato:

$$M = \frac{\pi}{2}\,R^4 h\,.$$

Si osservi che nell'ultima integrazione $\dfrac{\pi}{2}\,R^4$ era costante e quindi si è portato come fattore fuori del segno di integrazione.

Questo esempio basta per mostrarvi il meccanismo d'una integrazione multipla. Questi integrali hanno applicazioni numerose e bellissime; quelli che potrete incontrare nelle opere di fisica sono in generale già calcolati. Noi qui volevamo soltanto darvene un'idea.

CAPITOLO XVIII

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

119. Che cosa è una equazione differenziale. — Come abbiamo già esposto al numero 11 il calcolo infinitesimale comprende tre categorie di problemi:

1° Conoscendo una funzione, trovare la sua derivata od il suo differenziale (derivazione);

2° Conoscendo una derivata od un differenziale ritrovare la funzione (integrazione);

3° Infine conoscendo una relazione fra una funzione, la sua variabile e le sue derivate, ritrovare la funzione incognita che la soddisfa.

È quest'ultimo problema quello che dobbiamo ora imparare a risolvere.

120. Un piccolo passo indietro. — Quando abbiamo imparato a integrare una funzione come $y' = 2x$ oppure un differenziale come $dy = 2x\,dx$ abbiamo osservata una certa indeterminazione nel risultato che era, come ricorderete, affetto da una costante additiva C:

$$\int 2\,x\,dx = x^2 + C.$$

Dal punto di vista analitico $x^2 + C$ rappresenta un gruppo di funzioni, come $x^2 + 4$ oppure $x^2 + 15$, aventi tutte la proprietà di essere degli integrali di $2x$. Geometricamente ciò indica che la retta $y = 2x$ ha un numero infinito di linee integrali, aventi per equazione generale:

$$y = x^2 + C.$$

Fra queste linee vi sono ad esempio le seguenti:

$$y = x^2 + 1,$$
$$y = x^2 + 3/2,$$
$$y = x^2 - 7,$$

Tutte le linee la cui equazione è del tipo

$$y = x^2 + C,$$

dove C è una costante qualunque (positiva, negativa, eventualmente nulla) costituiscono una famiglia di linee.

Ora questa indeterminazione apparente dell'integrale indefinita non disturba per nulla le applicazioni, come vedemmo nel corso dei capitoli precedenti.

Anzi man mano che ci si addentra nello studio dell'analisi si arriva a dei risultati il cui grado di indeterminatezza cresce sempre più senza che essi cessino perciò di essere perfettamente utilizzabili.

Quando integreremo una equazione differenziale il risultato conterrà una o più costanti che potranno essere additive o moltiplicative. Dando a questa o a queste costanti un valore numerico qualsiasi si avrà una linea integrale dell'equazione. Dando loro più valori si otterranno più linee soddisfacenti alla condizione espressa dall'equazione differenziale. La soluzione generale rappresenterà quindi una famiglia di linee.

121. Esempio d'una famiglia di curve. — Consideriamo l'equazione:

$$y = Cx^2.$$

Il numero C è analogo alla costante d'integrazione dell'esempio precedente, colla differenza però che esso qui figura come fattore.

Esso ha la curiosa proprietà di essere ad un tempo costante e variabile. Non temete di non comprendere poichè non abbiamo ancora imparato nulla di più semplice.

La funzione:

$$y = Cx^2$$

rappresenta una famiglia di curve, alcune delle quali sono rappresentate dalla figura 50. A questa famiglia appartengono ad esempio le linee aventi le seguenti equazioni:

$$y = 2\ x^2,$$
$$y = 4\ x^2,$$
$$y = 7\ x^2.$$

Ora nella prima curva si ha $C = 2$ lungo tutta la curva, quindi C è costante.

Nella seconda curva C è eguale a 4 lungo tutta la curva, quindi C è costante.

Nella terza curva C è ancora costante, poichè vale 7 per tutta la curva.

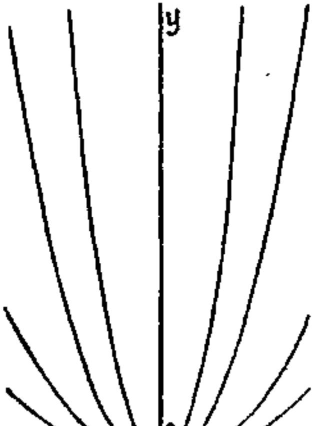


Fig. 50.

Quindi in ciascuna curva C rimane costante. Ma siccome esso vale 2 nella prima curva, 4 nella seconda e 7 nella terza, esso varia da una curva all'altra. Per questo affermammo che C è nello stesso tempo costante e variabile.

Vedremo nel metodo della *variazione delle costanti* che può essere utile far variare una costante per cercare la vera forma d'un integrale generale.

122. Relazione differenziale formata geometricamente. — Consideriamo una parabola (fig. 51) di cui supporremo dapprima di non conoscere l'equazione. Cerchiamo anzitutto una relazione geometrica fra l'ordinata y, l'ascissa x e la derivata y'.

Sia E un punto di ascissa x e di ordinata y. Conduciamo la tangente in E. Riteniamo cosa nota che

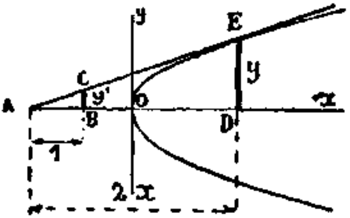


Fig. 51.

la sottotangente AD della parabola è divisa in parti eguali dal vertice della parabola, quindi: $AO = OD$ e per conseguenza $AD = 2x$.

Portiamo $AB = 1$; il segmento BC misura la pendenza della tangente in E e di conseguenza la derivata in E; quindi:

$$BC = y',$$

e perciò:

$$y = 2xy'.$$

Ecco dunque un'equazione differenziale, poichè possiamo scorgervi la funzione y, la variabile x e la derivata y'.

Essa indica che la funzione vale $2x$ volte la sua derivata. Tutte le parabole passanti per l'origine ed aventi per asse l'asse delle x godono di questa proprietà. Quindi possiamo prevedere che l'integrazione dell'equazione $y = 2xy'$ ci darà una famiglia di parabole.

Stabiliremo ora algebricamente questa equazione fondamentale partendo dall'equazione della parabola.

123. Formazione algebrica della stessa equazione differenziale. — Prendiamo le mosse dalla equazione della parabola:

$$y^2 = 2Cx,$$

differenziamo separatamente i due membri; si ha:

$$2\ y\ dy = 2\ C\ dx.$$

Dividiamo membro a membro le due eguaglianze precedenti; risulta:

$$\frac{2\ y\ dy}{y^2} = \frac{2\ C\ dx}{2\ Cx};$$

semplifichiamo:

$$\frac{2\ dy}{y} = \frac{dx}{x};$$

da questa deduciamo:

$$= 2x\frac{dy}{dx},$$

e siccome $\frac{dy}{dx}$ è la derivata, cioè y', si ha:

$$y = 2xy'.$$

È la stessa equazione differenziale fornitaci dalla geometria nel numero precedente. Tentiamo ora d'integrarla, cioè di rimontare analiticamente alla famiglia di curve che la soddisfano.

124. Integrazione d'una equazione differenziale. — Prima d'intraprendere il calcolo, ricordiamo che la derivata di $\ln x$ (si tratta di un logaritmo neperiano) è $\frac{1}{x}$ ed il suo differenziale $\frac{1}{x}dx$ oppure $\frac{dx}{x}$; di conseguenza l'integrale di $\frac{dx}{x}$ è $\ln x$. Parimenti l'integrale di $\frac{dy}{y}$ è $\ln y$. I logaritmi ed il numero e hanno gran parte nell'integrazione delle equazioni differenziali.

Sia ora l'equazione precedente:

$$y = 2x\frac{dy}{dx}.$$

Raccogliamo per loro conto le y e le x (ciò che si chiama *separare le variabili*). Si ha facilmente:

$$\frac{2\,dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Siccome queste due quantità sono eguali, i loro integrali lo saranno pure a meno di una costante:

$$\int \frac{2\,dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + \text{costante arbitraria},$$

ed in base a quanto abbiamo ricordato:

$$2 \ln y = \ln x + \text{costante arbitraria}.$$

La costante si può mettere sotto forma logaritmica, poichè è arbitraria; la rappresenteremo con $\ln 2C$.

Allora:

$$2 \ln y = \ln x + \ln 2\,C.$$

Dai logaritmi rimontiamo ai numeri ricordando che

$$2 \ln y = \ln y^2 \text{ e } \ln x + \ln 2\,C = \ln 2\,Cx.$$

otterremo quindi:

$$y^2 = 2\,Cx.$$

Questa è la soluzione generale dell'equazione differenziale: essa coincide con quella da cui partimmo nel numero precedente.

Le curve $y^2 = 2x$; $y^2 = 4x$; $y^2 = 6x$, ecc. rappresentano invece delle soluzioni particolari. Esse discendono dalla soluzione generale quando si assegnano alla costante C particolari valori.

125. Altri esempi. — Una equazione differenziale è del primo ordine quando non contiene che la derivata prima. Se contiene la derivata seconda è di secondo ordine e così via.

Trattiamo qualche esempio semplice, insistendo sul fatto che si possono mettere le costanti sotto la forma che si vuole; ciò importa poco poichè sono arbitrarie.

Sia da integrare l'equazione:

$$y' = xy.$$

La derivata è eguale al prodotto delle ordinate, il che si può scrivere:

$$\frac{dy}{dx} = xy;$$

separiamo le variabili:

$$\frac{dy}{y} = xdx.$$

Gli integrali sono eguali a meno di una costante:

$$\int \frac{dy}{y} = \int x dx + \text{costante arbitraria};$$

ossia:

$$\ln y = \frac{x^2}{2} + \text{costante arbitraria}.$$

Scriviamo la costante nella forma $\ln C$; avremo:

$$\ln y = \frac{x^2}{2} + \ln C,$$

oppure:

$$\ln y - \ln C = \frac{x^2}{2};$$

la differenza di due logaritmi è eguale al logaritmo del quoziente, quindi:

$$\ln \frac{y}{C} = \frac{x^2}{2}.$$

Dire che il logaritmo di $\frac{y}{C}$ è $\frac{x^2}{2}$ equivale a dire che bisogna elevare e alla potenza $\frac{x^2}{2}$ per ottenere $\frac{y}{C}$, quindi:

$$\frac{y}{C} = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

da cui il risultato:

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}.$$

Verifichiamo che questa funzione è proprio eguale a $\frac{1}{x}$ volte la sua derivata, cioè che la derivata è eguale a x volte la sua funzione primitiva.

Dobbiamo derivare:

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}},$$

che è una funzione di funzione; poniamo:

$$\frac{x^2}{2} = z,$$

allora:

$$y = Ce^z.$$

La derivata di z rispetto a x è $\frac{2\ x}{2}$ cioè x.

La derivata di y rispetto a z è Ce^z.

Il loro prodotto è xCe^z cioè, sostituendo z col suo valore, $xCe^{\frac{x^2}{2}}$. Questa è la derivata; essa è precisamente eguale a x volte la funzione $Ce^{\frac{x^2}{2}}$.

Ancora un esempio. — Sia da integrare la seguente equazione differenziale:

$$\operatorname{sen} x \, dy = y \, dx.$$

Separiamo le variabili:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{\operatorname{sen} x};$$

gli integrali sono eguali a meno di una costante:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} + \text{costante arbitraria.}$$

Verificherete facilmente che

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2};$$

(infatti

$$D . \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} x/2} \frac{1}{\cos^2 x/2} \frac{1}{2} =$$
$$= \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \left.\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$$

si ha quindi:

$$\ln y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \ln C,$$

avendo indicato con $\ln C$ la costante arbitraria.

Ma la somma di due logaritmi è eguale al logaritmo del prodotto, quindi:

$$\ln y = \ln \left(C \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right);$$

da cui:

$$y = C \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Questo è il risultato.

Ecco ancora un esempio semplice che ci servirà tosto per risolvere un caso più complicato.

Sia da integrare:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0;$$

che si può scrivere:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

ed integrando:

$$\ln y = \ln x + \ln C,$$

avendo indicato, come dianzi, la costante arbitraria con $\ln C$.

Si deduce che:

$$\ln y = \ln Cx,$$

da cui:

$$y = Cx.$$

È questa l'equazione di una retta qualsiasi passante per l'origine. Eravamo partiti dall'equazione

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0;$$

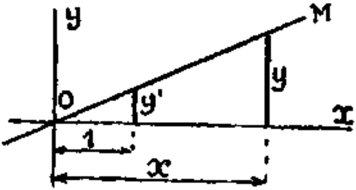


Fig. 52.

questa equazione si può porre anche sotto la forma

$$y' = \frac{y}{x},$$

ed allora è chiaro il suo significato geometrico: essa esprime che la derivata y' deve essere sempre eguale al rapporto $\frac{y}{x}$. Ogni retta passante per l'origine soddisfa a questa condizione (vedasi la fig. 52); occorre osservare che una retta non passante per l'origine non soddisfa alla condizione data.

126. Metodo della variazione delle costanti. — Tenteremo di dare un'idea di questo metodo delicato. Lo si impiega quando ci si trova davanti a un'equazione con un secondo membro e che si saprebbe risolvere se questo secondo membro fosse zero.

Si eguaglia il primo membro a zero e si risolve l'equazione così ottenuta. Questa prima soluzione introduce una costante che si determina in seguito in modo da soddisfare all'equazione provvista del suo secondo membro.

Un esempio farà meglio comprendere la cosa.

Sia da integrare:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2.$$

Rivolgiamoci dapprima all'equazione senza secondo membro:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0$$

e risolviamola. È la stessa di cui ci occupammo nel numero precedente; il suo integrale è:

$$y = Cx.$$

Consideriamo ora anche C come funzione di x e deriviamo la y; la derivata di y si otterrà con la regola di derivazione di un prodotto e sarà

$$\frac{dy}{dx} = C + x\frac{dC}{dx}.$$

Sostituiamo nell'equazione proposta a $\frac{dy}{dx}$ e y i loro valori. Ne segue:

$$C + x\frac{dC}{dx} - \frac{Cx}{x} = x^2,$$

da cui:

$$x\frac{dC}{dx} = x^2,$$

o ancora:

$$dC = x\,dx.$$

Questa equazione si può integrare; essa ci dà:

$$C = \int x\,dx,$$

a meno di una costante.

Per distinguere la nuova costante dall'antica chiamiamola K e calcoliamo l'integrale; si ha:

$$C = \tfrac{1}{2}x^2 + K.$$

Introducendo questo valore nella:

$$y = Cx$$

si ha:

$$y = (\tfrac{1}{2}x^2 + K)\,x = \tfrac{1}{2}x^3 + Kx$$

Non c'è più nessuna ragione di non chiamare C la costante K, e scriveremo quindi:

$$y = \tfrac{1}{2} x^3 + Cx. \tag{1}$$

Ecco il risultato del nostro procedimento. Verifichiamolo per maggior sicurezza.

Dobbiamo ritrovare:

$$y' - \frac{y}{x} = x^2.$$

Deriviamo l'eguaglianza (1); otteniamo:

$$y' = \frac{3}{2} x^2 + C.$$

Ma l'eguaglianza (1) divisa per x dà:

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2} x^2 + C.$$

Sottraendo membro a membro le due precedenti eguaglianze otteniamo:

$$y' - \frac{y}{x} = x^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) = x^2,$$

che è precisamente l'equazione da cui siamo partiti. Il metodo è buono perchè conduce allo scopo.

127. Equazione di Clairaut. — Per chiudere questo capitolo, il cui scopo è unicamente quello di darvi un'idea dei metodi più noti, daremo un nuovo esempio. Il procedimento che vogliamo illustrare è dovuto a Lagrange; noi l'applicheremo ad un'equazione di Clairaut, la cui soluzione molto semplice e molto bella rappresenta una famiglia di rette che inviluppa una parabola. La *soluzione generale* comprende tutte queste rette. La parabola, che pur soddisfa l'equazione proposta ma non è contenuta nella soluzione generale, viene chiamata *soluzione singolare*.

Sia l'equazione:

$$y = xy' + y'^2. \tag{1}$$

L'ordinata y dev'essere eguale al prodotto dell'ascissa per la derivata aumentato del quadrato di questa derivata.

Prendiamo i differenziali dei due membri, osservando che la y appare come funzione delle due variabili x e y', e quindi il suo differenziale si otterrà sommando i due differenziali parziali (ricordatevi quanto imparaste leggendo i numeri 114 e 115); abbiamo:

$$dy = (x + 2\,y')\,dy' + y'\,dx.$$

Ora il differenziale dy è il prodotto della derivata y' per dx:

$$dy = y'dx;$$

eguagliamo le due precedenti espressioni di dy:

$$(x + 2y')\, dy' + y'dx = y'dx,$$

da cui:

$$(x + 2y')\, dy' = 0.$$

Questa equazione esprime che un prodotto di due fattori si annulla; per soddisfarla basta che l'uno o l'altro fattore siano nulli. Dev'essere quindi

$$x + 2y' = 0, \qquad (2)$$

oppure:

$$dy' = 0. \qquad (3)$$

Dall'eguaglianza (2) si ricava:

$$y' = \frac{-x}{2}$$

che introdotta nell'equazione (1) ci dà:

$$y = -\frac{1}{4}x^2;$$

questa è l'equazione di una parabola.

L'altra eguaglianza $dy' = 0$ ci indica che y' è costante, poichè il suo differenziale è nullo: avremo dunque

$$y' = C,$$

e sostituendo nella equazione (1) otterremo,

$$y = Cx + C^2;$$

questa è l'equazione generale di una famiglia di rette tangenti alla parabola.

Queste rette sono per es.:

$$\begin{array}{ll} y = 2x + 4 & y = -2x + 4 \\ y = 3x + 9 & y = -3x + 9 \\ y = x + 1 & y = -x + 1 \end{array}$$

Alla famiglia appartiene anche l'asse delle x, perchè la sua equazione, che è

$$y = 0,$$

rientra in quella della famiglia quando si assume $C = 0$.

Tracciamo queste diverse rette nella fig. 53. La curva che esse inviluppano è la parabola.

Ciascuna retta è una linea integrale dell'equazione differenziale. L'equazione generale di queste rette è la soluzione generale, che si chiama anche integrale generale. L'equazione della parabola non rappresenta che una sola linea (infatti essa non contiene alcuna costante arbitraria); essa fornisce pure una linea integrale, ma rappresenta un integrale singolare.

Al pari delle rette considerate essa soddisfa alla condizione imposta: cioè sulla linea integrale singolare l'ordinata y è uguale al prodotto di x per la derivata, aumentata del quadrato di questa derivata.

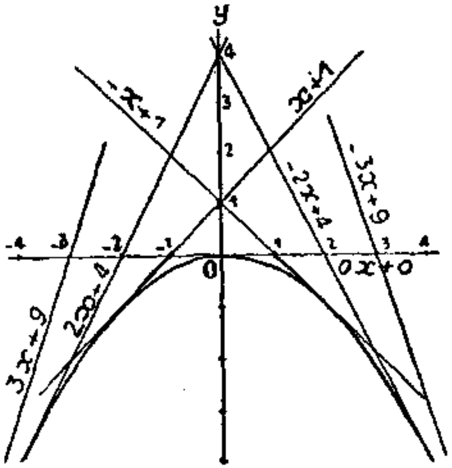


Fig. 53.

La potenza del metodo analitico è tale da non lasciare in ombra nessuna delle soluzioni del problema.

CAPITOLO XIX

COMPLEMENTI E CURIOSITÀ

128. Variazioni del linguaggio classico. — Ora che il lettore è iniziato all'analisi crediamo utile di ritornare sulla questione così delicata della definizione di derivata e di giustificare la definizione elementare che ne abbiamo data.

Esponiamo tre definizioni possibili e paragoniamole.

A. — A pag. 29 abbiamo definita la derivata come l'accrescimento della funzione per unità di variabile.

B. — Per taluni autori la derivata è il rapporto di due differenziali.

C. — Per i classici moderni la derivata è il limite del rapporto dell'incremento della funzione all'incremento della variabile, quando quest'ultimo tende comunque a zero.

Perchè questa diversità nelle definizioni che conducono tutte al medesimo risultato?

Forse perchè si confonde troppo spesso definizione con regola di calcolo.

Non si tratta di dire a che cosa è eguale la derivata, bensì anzitutto ciò che essa è e senza dubbio essa è una misura d'accrescimento; essa misura infatti l'accrescimento della funzione quando quello della variabile è preso eguale all'unità.

Per paragonare le tre definizioni date più sopra applichiamole per definire la più nota di tutte le derivate: la velocità.

A. — La velocità è l'incremento dello spazio per unità di tempo.

B. — La velocità è il rapporto del differenziale dello spazio al differenziale del tempo.

C. — La velocità è il limite del rapporto dell'incremento dello spazio all'incremento del tempo quando quest'ultimo incremento tende a zero.

Lascio giudicare al lettore quale di queste definizioni è la più naturale e la più adatta a schiarire le idee di un principiante.

Praticamente le tre definizioni *A*, *B*, *C*, sono equivalenti poichè conducono al medesimo risultato.

Osserviamo che la nostra definizione *A* è naturalmente compatibile con la notazione $\frac{dy}{dx}$.

Infatti, essendo la derivata l'aumento di y per unità di x, se chiamiamo dy e dx i due incrementi, si potrà dire:

Per dx unità di variabile la funzione aumenta di dy; e per un'unità, dx volte meno, cioè $\frac{dy}{dx}$.

Consiglio al lettore di meditare lungamente questa questione della derivata che è la chiave di volta dell'analisi elementare.

129. La regola di l'Hôpital. — Si indica con questo nome un curioso artificio di calcolo di cui tutti gli scolari sarebbero entusiasti se non fosse sovente accompagnato da una dimostrazione tanto nebulosa quanto la cosa è semplice.

Siccome si tratta di un'applicazione di derivate, ne diremo una parola.

Ci proponiamo di calcolare il vero valore d'un rapporto i cui due termini sono nulli nello stesso tempo, ciò che conduce alla forma $\frac{0}{0}$, la quale non ha alcun senso e perciò si dice « indeterminata ».

Supponiamo che ci si domandi di calcolare il vero valore del rapporto:

$$\frac{x^3 - 2x - 4}{x^3 + x - 10} \text{ per } x = 2;$$

e se si sostituisce x con 2 2 si trova:

$$\frac{8 - 4 - 4}{8 + 2 - 10} = \frac{0}{0}.$$

La regola di l' Hôpital ci dice che per calcolare il vero valore del rapporto considerato per $x = 2$ bisogna sostituire il rapporto delle due espressioni con quello delle loro derivate, che è

$$\frac{3x^2 - 2}{3x^2 + 1}.$$

Sostituendo allora x con 2 si trova:

$$\frac{12 - 2}{12 + 1} = \frac{10}{13}.$$

Il vero valore è $\frac{10}{13}$. L'indeterminatezza non era che apparente. Giustificheremo intuitivamente questa regola.

Il numeratore ed il denominatore sono funzioni di x che passano per lo zero quando la variabile x assume un certo valore (qui $x = 2$). Chiamiamo t la funzione numeratore ed u la funzione denominatore.

Dico che $\frac{t}{u} = \frac{t'}{u'}$ quando t e u passano per lo zero.

Infatti, consideriamo t e u al momento in cui $t = 0$ e $u = 0$.

Se si fa allora crescere x d'una piccola quantità dx la funzione t crescerà di dt e la funzione u crescerà di du.

Siccome queste funzioni erano nulle, ciascuna di esse è eguale al suo incremento (se il mio patrimonio era zero ed è aumentato di un centesimo, il mio patrimonio è eguale a questo centesimo).

Si ha dunque:

$$t = dt$$

e:

$$u = du,$$

da cui dividendo anzitutto membro a membro, indi sopra e sotto per dx, si ricava:

$$\frac{t}{u} = \frac{dt}{du} = \frac{\frac{dt}{dx}}{\frac{du}{dx}} = \frac{t'}{u'}.$$

Si vede che il rapporto di due funzioni che si annullano per uno stesso valore della variabile è eguale al rapporto delle loro derivate.

Se le derivate prime conducessero ancora alla forma $\frac{0}{0}$, si ripeterebbe lo stesso ragionamento e si prenderebbe il rapporto delle derivate seconde e così di seguito.

130. Il giochetto del binomio e delle serie. — È stato Newton che riuscì per primo a sviluppare il binomio $(x + a)^m$. La formola (molto utile per gli sviluppi in serie) è la seguente:

$$(x + a)^m = x^m + \frac{m}{1} a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2}$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{m-3} \ldots + a^m.$$

Per stabilirla intuitivamente ci abbandoneremo ad un facile giochetto. Scriviamo 5 volte $x + a$ verticalmente, come qui esposto:

$$\begin{array}{c} x + a \\ x + a \\ x + a \\ x + a \\ x + a \end{array}$$

ed immaginiamo d'aver scritto $x + a$ non 5 volte bensì m volte.

Le nostre 10 lettere occupano 10 caselle. Ora si tratta di arrivare in tutti i modi differenti possibili da una casella della prima riga ad una dell'ultima. Si può andare da sinistra a destra o da destra a sinistra come si vuole, ma mai spostarsi orizzontalmente o risalire.

Ecco qualche esempio di percorso permesso:

$$\begin{array}{ccc} x. & .a & x. \\ .a & .a & x. \\ .a & x. & .a \\ x. & .a & x. \\ .a & .a & .a \\ \hline a^3x^2 & a^4x & a^2x^3 \end{array}$$

Il primo percorso dà a^3x^2, il secondo a^4x ed il terzo a^2x^3. L'insieme di tutti i percorsi forma il prodotto $(x + a)^m$. Per numerare questi percorsi con metodo disponiamoli nell'ordine seguente: anzitutto quelli che contengono 5 volte il fattore x, poi quelli che lo contengono 4 volte, poi quelli che lo contengono 3 volte, e così di seguito (è quanto si chiama ordinare rispetto alle potenze decrescenti di x).

Non c'è che un modo di percorrere la tabella dall'alto al basso prendendo 5 volte (oppure m volte) il fattore x, ed è il seguente:

$$\begin{array}{c} x\,. \\ x\,. \\ x\,. \\ x\,. \\ x\,. \end{array} \qquad (1)$$

Ciò dà il primo termine del binomio, che è x^5, cioè in generale x^m.

Ma ci sono 5 modi per traversare il gioco prendendo 4 volte il fattore x, poichè la lettera a può occupare 5 caselle differenti; ecco queste 5 formazioni (oppure m formazioni):

$$\begin{array}{ccccc} .\,a & x\,. & x\,. & x\,. & x\,. \\ x\,. & .\,a & x\,. & x\,. & x\,. \\ x\,. & x\,. & .\,a & x\,. & x\,. \\ x\,. & x\,. & x\,. & .\,a & x\,. \\ x\,. & x\,. & x\,. & x\,. & .\,a \end{array} \qquad (2)$$

Ciò dà 5 volte ax^4 oppure m volte ax^{m-1} oppure max^{m-1}, che è precisamente il secondo termine del binomio.

Per formare la tabella 3 che conterrà tutti i termini in x^3 serviamoci delle 5 colonne della tabella (2). Prendiamo anzitutto la prima colonna; la lettera a può occuparvi 4 posti differenti cioè $(m - 1)$ posti.

Se tutte queste formazioni fossero buone ce ne sarebbero $m(m - 1)$ perchè la tabella 2 contiene m colonne di cui ciascuna fornisce $(m - 1)$ formazioni.

Ma osserviamo che ciascuna di queste formazioni figurerà due volte nella tabella 3. Infatti la formazione:

$$\begin{array}{c} .a \\ .a \\ x. \\ x. \\ x. \end{array}$$

sarà fornita una volta dalla prima colonna ed una dalla seconda; la formazione:

$$\begin{array}{c} .a \\ x. \\ .a \\ x. \\ x. \end{array}$$

sarà fornita una volta dalla prima colonna e una volta dalla terza, e così di seguito; occorre quindi prender solo la metà di queste formazioni del tipo a^2x^{m-2} cioè:

$$\frac{m\ (m - 1)}{2}\, a^2\, x^{m-2}.$$

Questo è precisamente il terzo termine del binomio.

Si passerebbe dalla tabella 3 così depurata alla seguente osservando che le $\frac{m\,(m-1)}{2}$ colonne della tabella 3 lascerebbero $m - 2$ posti alla lettera a, ma che ciascuna formazione nuova vi si ripeterebbe non più due volte ma tre, ciò che obbligherebbe a dividere per 3 il coefficiente e darebbe:

$$\frac{m\ (m - 1)\ (m - 2)}{2 \cdot 3}\, a^3\, x^{m-3}$$

e così di seguito.

Questa dimostrazione un po' empirica vi aiuterà a comprendere perchè lo studio del binomio è generalmente preceduto dallo studio delle permutazioni, disposizioni e combinazioni, studio che si chiama calcolo combinatorio.

Per rendervi conto come la formola del binomio permetta certi sviluppi in serie provate ad applicarla allo sviluppo della funzione e^x, che ha la seguente espressione approssimata, nella quale N rappresenta un numero molto grande:

$$e^x = \left\{\left(1 + \frac{1}{N}\right)^N\right\}^x = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{Nx}.$$

Benchè la forma sia un po' differente, si tratta sempre di un binomio. Invece di $x + a$ la parentesi contiene $1 + \frac{1}{N}$ e l'esponente che era m si scrive Nx. Se poi N tende all'infinito il numero dei termini cresce indefinitamente.

Dopo sviluppo e semplificazione troverete, come abbiamo scritto a pag. 131:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} \dots$$

Se prendete la derivata di questa serie troverete che è eguale alla serie stessa. Ciò vi dimostrerà che la derivata di e^x è e^x, come sapevamo.

Ciò vi proverà anche nello stesso tempo che gli sviluppi in serie possono servire a qualche cosa.

Ci fermeremo a questo semplice esempio.

131. Integrazione delle funzioni razionali. — Abbiamo serbata questa questione per i complementi, perchè essa richiede qualche conoscenza d'algebra. Per la stessa ragione ci limiteremo a dare solo un'idea sommaria del metodo.

Le funzioni razionali sono rapporti di due polinomi. La loro integrazione si presenta come un po' difficile; la si effettua scomponendo la funzione integranda in una somma di funzioni, la cui integrazione sia facile, come vedremo nel seguente esempio.

Sia da calcolare l'integrale.

$$\int \frac{6x^2 - 22x + 18}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}\, dx.$$

Nella funzione integranda il numeratore è di grado inferiore al denominatore; se si presentasse il caso opposto si eseguirebbe la divisione, e si porrebbe la funzione integranda sotto forma di somma di una parte intera e di una frazione della forma considerata: si sarebbe quindi ricondotti allo stesso caso.

Il denominatore della nostra frazione si annulla per $x = 1$, per cui è divisibile per $x - 1$. Il quoziente è $x^2 - 5x + 6$. Questo ultimo è a sua volta eguale a $(x - 2)\,(x - 3)$.

Il denominatore può quindi scriversi:

$$(x - 1)\,(x - 2)\,(x - 3).$$

Cerchiamo di mettere la nostra frazione sotto forma d'una somma di 3 frazioni i cui denominatori siano $(x - 1)$, $(x - 2)$ e $(x - 3)$, e delle quali indicheremo i 3 numeratori incogniti con A, B, C.

Possiamo quindi porre:

$$\frac{6x^2 - 22x + 18}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} =$$

$$= \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 3}.$$

Riducendo allo stesso denominatore le 3 frazioni per farne la somma, si avrà un numeratore eguale a:

$$A\,(x-2)\,(x-3) + B\,(x-1)\,(x-3) + C\,(x-1)\,(x-2).$$

Questo numeratore è eguale all'altro, quindi:

$$6x^2 - 22x + 18 = A\,(x-2)\,(x-3) + B\,(x-1)\,(x-3) + C\,(x-1)\,(x-2).$$

Questa eguaglianza è vera per tutti i valori della variabile x. Ne approfitteremo per dare a x dei valori che annullano taluni coefficienti delle incognite A, B, C.

Se $x = 1$ si ha:

$$6 - 22 + 18 = A\,(-1)\,(-2) + B \times 0 + C \times 0$$

da cui:

$$2 = 2A, \text{ e quindi } A = 1.$$

Dando a x il valore 2 si ha:

$$24 - 44 + 18 = B\,(+1)\,(-1) = -B$$

ossia:

$$-2 = -B, \text{ e quindi } B = 2.$$

Facendo $x = 3$ si ha:

$$54 - 66 + 18 = C \times 2 \times 1 = 2C$$

da cui:

$$6 = 2C, \text{ e quindi } C = 3.$$

La funzione da integrare eguaglia quindi la somma

$$\frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x - 2} + \frac{3}{x - 3}$$

e possiamo allora calcolare facilmente l'integrale dato, perch'esso si decompone nella somma di tre integrali facilissimi:

$$\int \frac{1}{x - 1}\, dx + \int \frac{2}{x - 2}\, dx + \int \frac{3}{x - 3}\, dx$$

ossia:

$$\int \frac{dx}{x - 1} + 2 \int \frac{dx}{x - 2} + 3 \int \frac{dx}{x - 3};$$

il risultato è:

$$\ln (x - 1) + 2 \ln (x - 2) + 3 \ln (x - 3) + C.$$

Troverete dappertutto degli esercizi analoghi a questo. Potete del resto fabbricarne voi stessi addizionando delle frazioni semplici per ottenere una frazione somma che vi eserciterete in seguito a scomporre ancora nei suoi addendi.

È questo il modo col quale si fabbricano gli esercizi ed io non ho fatto altrimenti.

Vedete bene che non ho segreti per voi.

132. Una parola di conclusione. — Eccoci alla fine del nostro piccolo viaggio d'iniziazione.

Se ne avete seguite le tappe con metodo ed avete ritrovata voi stessi la soluzione dei numerosi esercizi per voi risolti, spero che senza darvi troppa pena avrete imparato qualche cosa ed assimilate molte nozioni utili.

Dovete ora essere in grado di leggere con profitto non importa qual trattato di matematiche generali o speciali, il cui studio diretto vi avrebbe forse disanimati.

Forse talune delle mie dimostrazioni vi saranno sembrate poco rigorose, ma se le giudicate vuol dire che le avete lette ed in questo caso il mio scopo è raggiunto poichè volevo proprio soltanto farmi leggere.

Al contrario di molti autori illustri non penso che ciascun teorema richieda una dimostrazione unica d'un rigore così assoluto, d'una precisione così perfetta da proibire qualsiasi altro linguaggio.

Penso che la peggior dimostrazione per un dato lettore è quella che in tre righe lo spinge a chiudere il libro ed a disgustarlo una volta per sempre.

Se a prezzo di qualche lacuna che i vostri studi ulteriori vi permetteranno facilmente di colmare sono riuscito a farvi amare le matematiche, se ho potuto farvi intravvedere qualche cosa della loro incontestabile bellezza, se questo libretto vi ha dato il desiderio di spingere i vostri studi più in alto e più lontano, mi considererò contento e le critiche dei puristi mi lasceranno indifferente.

Non per essi ho scritto questo lavoro che ho voluto situare esattissimamente al livello del buon senso. Quanti se ne stimano superiori che ne sono semplicemente al di là!

Troverete qui appresso una tabella delle formole più comuni di derivazione e integrazione.

FORMULE USUALI
DI DERIVAZIONE ED INTEGRAZIONE

DERIVAZIONE

FUNZIONI	DERIVATE
$y = x$	$y' = 1$
$y = ax$	$y' = a$
$y = x^2$	$y' = 2x$
$y = x^m$	$y' = mx^{m-1}$
$y = au$	$y' = au'$
$y = u + v - t$	$y' = u' + v' - t'$
$y = uv$	$y' = u'v + uv'$
$y = uvt$	$y' = u'vt + uv't + uvt$
$y = \dfrac{u}{v}$	$y' = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$
$y = \dfrac{1}{x}$	$y' = \dfrac{-1}{x^2}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = f(u)$	$y' = f'\ u'$

$y = \sqrt{u}$	$y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = e^{Cx}$	$y' = Ce^{Cx}$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x \ln a}$
$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$y = \operatorname{arc\,sen} x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = \operatorname{arc\,cos} x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = \operatorname{arc\,tg} x$	$y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$

INTEGRAZIONE INDEFINITA

$$\int (u + v - t)\, dx = \int u dx + \int v dx - \int t dx$$
$$\int u v' dx = uv - \int u' v dx$$

$$\int dx = x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + C$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \operatorname{cotg} x \, dx = \ln \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right] + C$$

INTEGRAZIONE DEFINITA

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x \, dx = 2$$

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 mx \, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = 1$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - x^2} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln \frac{b}{a}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{4}$$